

---

# LE LEMME FONDAMENTAL POUR LES ALGÈBRES DE LIE

par

Ngô Bao Châu

---

## Introduction

Dans cet article, nous proposons une démonstration pour des conjectures de Langlands, Shelstad et Waldspurger plus connues sous le nom de lemme fondamental pour les algèbres de Lie et lemme fondamental non standard. On se reporte à 1.11.1 et à 1.12.7 pour plus de précisions dans les énoncés suivants.

**Théorème 1.** — *Soient  $k$  un corps fini à  $q$  éléments,  $\mathcal{O}$  un anneau de valuation discrète complet de corps résiduel  $k$  et  $F$  son corps des fractions. Soit  $G$  un schéma en groupes réductifs au-dessus de  $\mathcal{O}$  dont l'ordre du groupe de Weyl n'est pas divisible par la caractéristique de  $k$ . Soient  $(\kappa, \rho_\kappa)$  une donnée endoscopique de  $G$  au-dessus de  $\mathcal{O}$  et  $H$  le schéma en groupes endoscopiques associé.*

*On a l'égalité entre la  $\kappa$ -intégrale orbitale et l'intégrale orbitale stable*

$$\Delta_G(a) \mathbf{O}_a^\kappa(1_{\mathfrak{g}}, dt) = \Delta_H(a_H) \mathbf{SO}_{a_H}(1_{\mathfrak{h}}, dt)$$

*associées aux classes de conjugaison stable semi-simples régulières  $a$  et  $a_H$  de  $\mathfrak{g}(F)$  et  $\mathfrak{h}(F)$  qui se correspondent, aux fonctions caractéristiques  $1_{\mathfrak{g}}$  et  $1_{\mathfrak{h}}$  des compacts  $\mathfrak{g}(\mathcal{O})$  et  $\mathfrak{h}(\mathcal{O})$  dans  $\mathfrak{g}(F)$  et  $\mathfrak{h}(F)$  et où on a noté*

$$\Delta_G(a) = q^{-\text{val}(\mathfrak{D}_G(a))/2} \text{ et } \Delta_H(a_H) = q^{-\text{val}(\mathfrak{D}_H(a_H))/2}$$

*$\mathfrak{D}_G$  et  $\mathfrak{D}_H$  étant les fonctions discriminant de  $G$  et de  $H$ .*

**Théorème 2.** — Soient  $G_1, G_2$  deux schémas en groupes réductifs sur  $\mathcal{O}$  ayant des données radicielles isogènes dont l'ordre du groupe de Weyl n'est pas divisible par la caractéristique de  $k$ . Alors, on a l'égalité suivante entre les intégrales orbitales stables

$$\mathrm{SO}_{a_1}(1_{\mathfrak{g}_1}, dt) = \mathrm{SO}_{a_2}(1_{\mathfrak{g}_2}, dt)$$

associées aux classes de conjugaison stable semi-simples régulières  $a_1$  et  $a_2$  de  $\mathfrak{g}_1(F)$  et  $\mathfrak{g}_2(F)$  qui se correspondent et aux fonctions caractéristiques  $1_{\mathfrak{g}_1}$  et  $1_{\mathfrak{g}_2}$  des compacts  $\mathfrak{g}_1(\mathcal{O})$  et  $\mathfrak{g}_2(\mathcal{O})$  dans  $\mathfrak{g}_1(F)$  et  $\mathfrak{g}_2(F)$ .

Nous démontrons ces théorèmes dans le cas d'égale caractéristique. D'après Waldspurger, le cas d'inégales caractéristiques s'en déduit *cf.* [78].

Les applications principales du lemme fondamental se trouvent dans la réalisation de certains cas particuliers du principe de fonctorialité de Langlands via la comparaison de formules des traces et dans la construction de représentations galoisiennes attachées aux formes automorphes par le biais du calcul de cohomologie des variétés de Shimura. On se réfère aux travaux d'Arthur [2] pour les applications à la comparaison de formules des traces et à l'article de Kottwitz [42] ainsi qu'au livre en préparation édité par Harris pour les applications aux variétés de Shimura.

*Cas connus et réductions.* — Le lemme fondamental a été établi dans un grand nombre de cas particuliers. Son analogue archimédien a été entièrement résolu par Shelstad dans [67]. Ce cas a incité Langlands et Shelstad à formuler leur conjecture pour un corps non-archimédien. Le cas du groupe  $\mathrm{SL}(2)$  a été traité par Labesse et Langlands dans [46]. Le cas du groupe unitaire à trois variables a été résolu par Rogawski dans [62]. Les cas assimilés aux  $\mathrm{Sp}(4)$  et  $\mathrm{GL}(4)$  tordu ont été résolus par Hales, Schröder et Weissauer par des calculs explicites *cf.* [30], [64] et [81]. Récemment, Whitehouse a poursuivi ces calculs pour démontrer le lemme fondamental pondéré tordu dans ce cas *cf.* [80].

Le lemme fondamental pour le changement de base stable a été établi par Clozel [12] et Labesse [45] à partir du cas de l'unité de l'algèbre de Hecke démontré par Kottwitz [40]. Auparavant, le cas  $\mathrm{GL}(2)$  a été établi par Langlands [47] et le cas  $\mathrm{GL}(3)$  par Kottwitz [36].

Un autre cas important est le cas  $\mathrm{SL}(n)$  résolu par Waldspurger dans [75]. Le cas  $\mathrm{SL}(3)$  avec un tore elliptique a été établi auparavant par

Kottwitz *cf.* [37] et le cas  $SL(n)$  avec un tore elliptique par Kazhdan *cf.* [33].

Récemment, avec Laumon, nous avons démontré le lemme fondamental pour les algèbres de Lie des groupes unitaires dans le cas d'égale caractéristique. La méthode que nous utilisons est géométrique et ne s'applique qu'aux corps locaux d'égale caractéristique. Comme nous avons déjà mentionné, le cas d'inégales caractéristiques s'en déduit grâce aux travaux de Waldspurger [78]. Le changement de caractéristiques a aussi été établi par Cluckers et Loeser [13] dans un cadre plus général mais moins précis sur la borne de la caractéristique résiduelle en utilisant la logique.

Dans une série de travaux comprenant notamment [76] et [79], Waldspurger a démontré que le lemme fondamental pour les groupes ainsi que le transfert se déduit du lemme fondamental ordinaire pour les algèbres de Lie. De même, le lemme fondamental tordu se déduit de la conjonction du lemme ordinaire pour les algèbres de Lie et de ce qu'il appelle le lemme non standard. Dans la suite de cet article, on se restreint au lemme fondamental ordinaire pour les algèbres de Lie et sa variante non standard sur un corps local d'égale caractéristique.

*Approche géométrique locale.* — Kazhdan et Lusztig ont introduit dans [34] les fibres de Springer affines qui sont des incarnations géométriques des intégrales orbitales. Ce travail fournit des renseignements de base sur la géométrie des fibres de Springer affines que nous rappellerons dans le chapitre 3 du présent article.

Dans l'annexe à [34], Bernstein et Kazhdan ont construit une fibre de Springer affine pour le groupe  $Sp(6)$  dont le nombre de points n'est pas un polynôme en  $q$ . En fait, le motif associé à cette fibre de Springer affine contient le motif d'une courbe hyperelliptique. Cet exemple suggère qu'il est peu probable qu'on puisse obtenir une formule explicite pour les intégrales orbitales.

L'interprétation des  $\kappa$ -intégrales orbitales en termes des quotients des fibres de Springer affines a été établie dans l'article de Goresky, Kottwitz et MacPherson [24]. Ils ont aussi introduit dans [24] l'usage de la cohomologie équivariante dans l'étude des fibres de Springer affines. Cette stratégie est très adaptée au cas particulier des éléments qui appartiennent à un tore non ramifié car on dispose dans ce cas d'une action d'un gros tore sur la fibre de Springer affine n'ayant que des points fixes

isolés. Ils ont aussi découvert une relation remarquable entre la cohomologie équivariante d'une fibre de Springer affine pour  $G$  et la fibre correspondante pour le groupe endoscopique  $H$  dans ce cadre non ramifié. Cette relation dépend en plus d'une conjecture de pureté de la cohomologie de ces fibres de Springer affines. Cette conjecture a été vérifiée pour les éléments ayant des valuations radicielles égales dans [25].

Dans [50] et [51], Laumon a introduit une méthode de déformation des fibres de Springer dans le cas des groupes unitaires fondée sur la théorie des déformation des courbes planes. Sa stratégie consiste à introduire une courbe plane de genre géométrique nul ayant une singularité prescrite par la situation locale et ensuite à déformer cette courbe plane. Il a aussi remarqué que dans le cas unitaire, il existe un tore de dimension un agissant sur les fibres de Springer affine de  $U(n)$  associées à une classe stable provenant de  $U(n_1) \times U(n_2)$  dont la variété des points fixes est la fibre de Springer affine correspondant de  $U(n_1) \times U(n_2)$ . En calculant la cohomologie équivariante en famille, il a pu démontrer le lemme fondamental dans le cas unitaire mais pour les éléments éventuellement ramifiés. Sa démonstration dépend de nouveau de la conjecture de pureté des fibres de Springer affines formulée par Goresky, Kottwitz et MacPherson.

Cette conjecture de pureté m'avait semblé l'obstacle principal de l'approche géométrique locale. Elle joue un rôle essentiel pour faire dégénérer certaines suites spectrales et permet d'appliquer le théorème de localisation d'Atiyah-Borel-Segal.

Il existe en fait un autre obstacle au moins aussi sérieux à l'usage de la cohomologie équivariante pour les fibres de Springer affines générales. Pour des éléments très ramifiés des groupes autres qu'unitaires, il n'y a pas d'action torique sur la fibre de Springer affine correspondante. Dans ce cas, même si on dispose de la conjecture de pureté, il n'est pas clair que les stratégies de [24] et [51] peuvent s'appliquer.

*Approche géométrique globale.* — Dans [32], Hitchin a démontré que le fibré cotangent de l'espace de module des fibrés stables sur une surface de Riemann compacte est un système hamiltonien complètement intégrable. Pour cela, il interprète ce fibré cotangent comme l'espace de module des fibrés principaux munis d'un champ de Higgs. Les hamiltoniens sont alors donnés par les coefficients du polynôme caractéristique du champ de Higgs. Il définit ainsi la fameuse fibration de Hitchin  $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{A}$  où  $\mathcal{M}$  est le fibré cotangent ci-dessus, où  $\mathcal{A}$  est l'espace affine classifiant les polynômes caractéristiques à coefficients dans l'espace des sections globales

de puissances convenables du fibré canonique de  $X$  et où  $f$  est un morphisme dont la fibre générique est essentiellement une variété abélienne.

De notre point de vue, les fibrés de Hitchin sont des analogues globaux des fibres de Springer affines. Il est par ailleurs important dans notre approche de prendre les fibrés de Higgs non à valeurs dans le fibré canonique mais à valeur dans un fibré inversible arbitraire de degré assez grand. Dans cette généralité, l'espace de module des fibrés de Higgs  $\mathcal{M}$  n'est plus muni d'une forme symplectique mais dispose toujours d'une fibration de Hitchin  $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{A}$ .

Nous avons observé dans [55] qu'un comptage formel de points de  $\mathcal{M}$  à coefficients dans un corps fini donne une expression quasiment identique au côté géométrique de la formule des traces pour l'algèbre de Lie. Nous nous sommes proposé dans [55] d'interpréter le processus de stabilisation de la formule des traces de Langlands et Kottwitz en terme de cohomologie  $\ell$ -adique de la fibration de Hitchin. Cette interprétation conduit à une formulation d'une variante globale du lemme fondamental en termes de cohomologie  $\ell$ -adique de la fibration de Hitchin *cf.* [14] et [56]. L'interprétation géométrique du processus de stabilisation avec la fibration de Hitchin ainsi que la formulation de cette variante globale du lemme fondamental est plus complexe que l'analogie local avec les fibres de Springer affines. En contrepartie, on dispose d'une géométrie plus riche.

L'interprétation géométrique du processus de stabilisation est fondée sur l'action d'un champ de Picard  $\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{A}$  sur  $\mathcal{M}$  qui est en quelque sorte le champ des symétries naturelles de la fibration de Hitchin. Le comptage de points avec l'aide de  $\mathcal{P}$  fait dans le paragraphe 9 de [55] est repris de façon plus systématique dans le dernier chapitre 8 du présent article. La construction de  $\mathcal{P}$  est fondée sur celle du centralisateur régulier que nous rappelons dans le chapitre 2. L'observation qui joue un rôle clé dans le comptage est que pour tout  $a \in \mathcal{M}(k)$ , le quotient  $[\mathcal{M}_a/\mathcal{P}_a]$  s'exprime en un produit de quotients locaux des fibres de Springer affines  $\mathcal{M}_v(a)$  par leurs groupes de symétries naturelles  $\mathcal{P}_v(J_a)$  *cf.* 4.13.1 et [55, 4.6]. Cette formule de produit apparaît en filigrane tout le long de l'article.

Le champ algébrique  $\mathcal{M}$  n'est pas de type fini. Il existe néanmoins un ouvert anisotrope  $\mathcal{A}^{\text{ani}}$  de  $\mathcal{A}$ , construit dans le chapitre 6, au-dessus duquel  $f^{\text{ani}} : \mathcal{M}^{\text{ani}} \rightarrow \mathcal{A}^{\text{ani}}$  est un morphisme propre. On sait par ailleurs que  $\mathcal{M}^{\text{ani}}$  est lisse sur le corps de base  $k$ . D'après Deligne [16], l'image directe dérivée  $f_*^{\text{ani}} \overline{\mathbb{Q}}_\ell$  est un complexe pur c'est-à-dire que les faisceaux

pervers de cohomologie

$$K^n = {}^p\mathrm{H}^n(f_*^{\mathrm{ani}} \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$$

sont des faisceaux pervers purs. D'après le théorème de décomposition, ceux-ci deviennent semi-simples après le changement de base à  $\mathcal{A}^{\mathrm{ani}} \otimes_k \bar{k}$ . En vue de démontrer le lemme fondamental, il est essentiel de comprendre les facteurs géométriquement simples dans cette décomposition.

L'action de  $\mathcal{P}$  sur  $\mathcal{M}$  induit une action de  $\mathcal{P}^{\mathrm{ani}}$  sur les faisceaux pervers  $K^n$ . Ceci permet de décomposer  $K^n$  en une somme directe

$$K^n = \bigoplus_{[\kappa]} K_{[\kappa]}^n$$

où  $[\kappa]$  parcourt l'ensemble des classes de conjugaison semi-simples dans le groupe dual  $\hat{G}$  et seul un nombre fini de  $[\kappa]$  contribue un facteur  $K_{[\kappa]}^n$  non nul. On note  $K_{\mathrm{st}}^n$  le facteur direct correspondant à  $\kappa = 1$ . L'apparition du groupe dual ici résulte du calcul du faisceau des composantes connexes des fibres de  $\mathcal{P}$  à la Tate-Nakayama qui a été entamée dans [55, 6] et est complétée dans les paragraphes 4.10 et 5.7 du présent article. Dans [55] et [56], nous avons montré que cette décomposition correspond exactement à la décomposition endoscopique du côté géométrique de la formule des traces qui a été établie par Langlands et Kottwitz *cf.* [48] et [41].

Fixons un élément  $\kappa$  dans la classe de conjugaison  $[\kappa]$ . Il n'y a qu'un nombre fini de groupes endoscopiques non ramifiés  $H$  associés à  $\kappa$ . Si  $H$  est l'un de ceux-ci, on a un morphisme  $\mathcal{A}_H \rightarrow \mathcal{A}$  qui au-dessus de  $\mathcal{A}^{\mathrm{ani}}$  est un morphisme fini non ramifié *cf.* [55, 7.2]. En gros, l'interprétation géométrique de la variante globale du lemme fondamental consiste en la comparaison entre le facteur  $K_{[\kappa]}^n$  et le facteur stable  $K_{H,\mathrm{st}}^n$  dans la décomposition de la cohomologie de la fibration de Hitchin des groupes endoscopiques  $H$  associés à  $\kappa$ . On se reporte à 6.4.3 pour un énoncé précis de la stabilisation géométrique. Le lemme fondamental de Langlands-Shelstad est une conséquence de 6.4.3.

Dans [55], on a démontré que  $K_{[\kappa]}^n$  est supporté par la réunion des images des morphismes  $\mathcal{A}_H \rightarrow \mathcal{A}$ . Comme on a vu dans [55] et [52], cet énoncé peut remplacer la conjecture de pureté de Goresky, Kottwitz et MacPherson dans le contexte de la fibration de Hitchin. Par ailleurs, il est très tentant de conjecturer que tous les facteurs simples de  $K_{[\kappa]}^n$  ont comme support l'image de l'un des morphismes  $\mathcal{A}_H \rightarrow \mathcal{A}$ . Remarquons que le théorème de stabilisation géométrique se déduit de cette conjecture du support car en effet il n'est pas difficile de l'établir sur un ouvert

dense de  $\mathcal{A}_H$ . Sur un ouvert assez petit, on peut utiliser un calcul de cohomologie équivariante comme dans [52] ou un comptage de points comme dans cet article pour établir la stabilisation.

Dans le cas unitaire, Laumon et moi avons utilisé la suite exacte d'Atiyah-Borel-Segal en cohomologie équivariante pour démontrer une variante ad hoc de l'énoncé de support ci-dessus. Mes tentatives ultérieures de généraliser cette méthode équivariante à d'autres groupes se sont heurtées à l'absence de l'action torique dans certaines fibres de Hitchin associées aux éléments très ramifiés.

Dans ce travail, on démontre pour tous les groupes une forme faible de la conjecture du support 7.6.6. En fait, on démontre un théorème de support général 7.1.13 qui implique dans la situation particulière de la fibration de Hitchin l'énoncé 7.6.6. Pour démontrer la conjecture de support dans la forme forte, il reste à vérifier une condition de  $\delta$ -régularité 7.1.3. Pour la fibration de Hitchin, cette  $\delta$ -régularité a été vérifiée en caractéristique zéro mais pas en caractéristique  $p$ . En caractéristique  $p$ , on démontre un énoncé plus faible 5.4.2 qui suffit néanmoins pour déduire le lemme fondamental de 7.6.6. En renversant l'argument local-global, le lemme fondamental implique le théorème de stabilisation géométrique 6.4.3.

Passons maintenant en revue l'organisation de l'article. Le premier chapitre contient l'énoncé du lemme fondamental pour les algèbres de Lie ainsi que sa variante non standard. Le coeur de l'article est l'avant-dernier chapitre 7 où on démontre le théorème du support. Le dernier chapitre 8 contient l'argument de comptage qui permet de déduire le lemme fondamental à partir du théorème du support. Les autres chapitres sont de nature préparatoire. Le chapitre 3 contient une étude de la géométrie des fibres de Springer affines. Le chapitre suivant 4 contient une étude parallèle de la géométrie de la fibration de Hitchin. Notre outil favori dans ces études est l'action des symétries naturelles fondée sur la construction du centralisateur régulier rappelée dans le chapitre 2. Dans le chapitre 5, on définit diverses stratifications de la base de Hitchin. Dans le chapitre suivant 6, on définit l'ouvert anisotrope de la base de Hitchin au-dessus duquel la fibration a toutes les bonnes propriétés pour qu'on puisse formuler le théorème de stabilisation géométrique 6.4.3 qui sera démontré dans les deux derniers chapitres 7 et 8. Dans l'appendice A, nous rappelons l'argument de comptage de dimension et dualité de Poincaré du à Goresky et MacPherson. Cet argument est utilisé dans la démonstration du théorème du support. Une table des matières détaillée est insérée à

la fin de l'article. Le lecteur pourra trouver au début de chaque chapitre un résumé de son contenu et des notations utilisées.

*Remerciements.* — Sans l'aide et l'encouragement des mathématiciens nommés ci-dessous, ce programme n'aurait probablement pas abouti et n'aurait probablement même pas eu lieu. Je tiens à leur exprimer toute ma reconnaissance. R. Kottwitz et G. Laumon qui m'ont appris la théorie de l'endoscopie et la géométrie algébrique, n'ont jamais cessé de m'aider avec beaucoup de générosité. P. Deligne et V. Drinfeld ont relu attentivement certaines parties du manuscrit. Leurs nombreux commentaires m'ont permis de corriger quelques erreurs et améliorer certains arguments. L'argument de dualité de Poincaré et de comptage de dimension que m'a expliqué Goresky a joué un rôle catalyseur de cet article. Il est évident que la lecture de l'article de Hitchin [32] a joué un rôle dans la conception de ce programme. Il en a été de même des articles de Faltings [20], de Donagi et Gaitsgory [19] et de Rapoport [60]. Les conversations que j'ai eues avec M. Harris sur le lemme non standard ont renforcé ma conviction sur la conjecture du support. M. Raynaud a eu la gentillesse de répondre à certaines de mes questions techniques. Je voudrais remercier J. Arthur, J.-P. Labesse, L. Lafforgue, R. Langlands, C. Moeglin, H. Saito et J.-L. Waldspurger de m'avoir encouragé dans ce long marche à la poursuite du lemme. Je dis un merci chaleureux aux mathématiciens qui ont participé activement aux séminaires sur l'endoscopie et le lemme fondamental que j'ai contribué à organiser à Paris-Nord et Bures au printemps 2003 et à Princeton aux automnes 2006 et 2007 parmi lesquels P.-H. Chaudouard, J.-F. Dat, L. Fargues, A. Genestier, A. Ichino, V. Lafforgue, S. Morel, Nguyen Chu Gia Vuong, Ngo Dac Tuan, S.W. Shin, D. Whitehouse et Zhiwei Yun.

J'exprime ma gratitude à l'I.H.E.S. à Bures-sur-Yvettes pour un séjour très agréable en 2003 où ce projet a été conçu. Il a été mené à son terme durant mes séjours en automne 2006 et pendant l'année universitaire 2007-2008 à l'Institute for Advanced Study à Princeton qui m'a offert des conditions de travail idéales. Pendant mes séjours à Princeton, j'ai bénéficié des soutiens financiers de l'AMIAS en 2006, de la fondation Charles Simonyi et ainsi de la NSF à travers le contrat DMS-0635607 en 2007-2008.

## 1. Conjectures de Langlands-Shelstad et Waldspurger

Dans ce chapitre, on rappelle l'énoncé du lemme fondamental pour les algèbres de Lie conjecturé par Langlands et Shelstad *cf.* 1.11.1 ainsi que la variante non standard conjecturée par Waldspurger *cf.* 1.12.7. Dans le dernier paragraphe de ce chapitre, nous rappelons où intervient le lemme fondamental de Langlands-Shelstad dans le processus de stabilisation du



côté géométrique la formule des traces. Notre étude de la fibration de Hitchin qui sera faite ultérieurement dans cet article est directement inspiré de ce processus de stabilisation. Nous nous efforçons de maintenir l'exposition de ce chapitre dans un langage aussi élémentaire que possible.

**1.1. Morphisme de Chevalley.** — Soient  $k$  un corps et  $\mathbb{G}$  un groupe réductif lisse connexe et déployé sur  $k$ . On fixera un tore maximal déployé  $\mathbb{T}$  et un sous-groupe de Borel  $\mathbb{B}$  contenant  $\mathbb{T}$ . Soient  $N_G(\mathbb{T})$  le normalisateur de  $\mathbb{T}$  et  $\mathbb{W} = N_G(\mathbb{T})/\mathbb{T}$  le groupe de Weyl. On supposera que la caractéristique du corps  $k$  ne divise pas l'ordre du groupe de Weyl. On notera  $\mathfrak{g}$  l'algèbre de Lie de  $\mathbb{G}$  et  $k[\mathfrak{g}]$  l'algèbre des fonctions régulières sur  $\mathfrak{g}$ . De même, on notera  $\mathfrak{t} = \text{Spec}(k[\mathfrak{t}])$  l'algèbre de Lie de  $\mathbb{T}$ . Soit  $r$  le rang de  $\mathbb{G}$ , qui par définition est la dimension du tore maximal  $\mathbb{T}$ .

Le groupe  $\mathbb{G}$  agit sur son algèbre de Lie par l'action adjointe. L'algèbre des fonctions  $\mathbb{G}$ -invariantes sur  $\mathfrak{g}$  s'identifie par la restriction de  $\mathfrak{g}$  à  $\mathfrak{t}$  à l'algèbre des fonctions  $\mathbb{W}$ -invariantes sur  $\mathfrak{t}$ . De plus, d'après Shephard, Todd [68] et Chevalley [11] celle-ci est une algèbre de polynômes cf. [10, 5.5].

**Théorème 1.1.1.** — *Par restriction de  $\mathfrak{g}$  à  $\mathfrak{t}$ , on a un isomorphisme d'algèbres  $k[\mathfrak{g}]^{\mathbb{G}} = k[\mathfrak{t}]^{\mathbb{W}}$ . De plus, il existe des fonctions homogènes  $a_1, \dots, a_r \in k[\mathfrak{g}]$  de degrés  $e_1, \dots, e_r$  telles que  $k[\mathfrak{g}]^{\mathbb{G}}$  soit l'algèbre des polynômes de variables  $a_1, \dots, a_r$ .*

Les entiers  $e_1, \dots, e_r$  rangés dans l'ordre croissants sont canoniquement définis. De plus, les entiers  $e_1 - 1, \dots, e_r - 1$  sont des exposants du système de racines d'après Kostant [35]. Pour les groupes classiques, il est possible de construire explicitement des polynômes invariants  $a_i$  à l'aide de l'algèbre linéaire cf. [32] et [57].

On notera  $\mathfrak{c} = \text{Spec}(k[\mathfrak{t}]^{\mathbb{W}}) = \text{Spec}(k[\mathfrak{g}]^{\mathbb{G}})$ . D'après le théorème ci-dessus, c'est un espace affine sur le corps  $k$  de dimension  $r$  et de coordonnées  $a_1, \dots, a_r$ . Il est de plus muni d'une action de  $\mathbb{G}_m$  donnée par

$$t(a_1, \dots, a_r) = (t^{e_1}a_1, \dots, t^{e_r}a_r)$$

qu'on appellera l'action par les exposants.

L'inclusion  $k[\mathfrak{t}]^{\mathbb{W}} \subset k[\mathfrak{t}]$  définit un morphisme  $\pi : \mathfrak{t} \rightarrow \mathfrak{c}$ . C'est un morphisme fini et plat qui réalise  $\mathfrak{c}$  comme le quotient au sens des invariants de  $\mathfrak{t}$  par l'action de  $\mathbb{W}$ . De plus, il existe un ouvert non vide  $\mathfrak{c}^{\text{rs}}$  de  $\mathfrak{c}$  au-dessus duquel  $\pi$  est un morphisme fini étale galoisien de groupe

de Galois  $\mathbb{W}$ . Ce morphisme est compatible avec l'action de  $\mathbb{G}_m$  par homothétie sur  $\mathfrak{t}$  et l'action de  $\mathbb{G}_m$  sur  $\mathfrak{c}$  par les exposants.

On notera  $\chi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{c}$  le morphisme caractéristique de Chevalley qui se déduit de l'inclusion d'algèbres  $k[\mathfrak{g}]^{\mathbb{G}} \subset k[\mathfrak{g}]$ . Ce morphisme est compatible avec l'action de  $\mathbb{G}_m$  par homothétie sur  $\mathfrak{g}$  et l'action de  $\mathbb{G}_m$  sur  $\mathfrak{c}$  par les exposants. Par analogie avec le cas des matrices, on appellera  $\chi(x)$  le polynôme caractéristique de  $x$  et  $\mathfrak{c}$  l'espace des polynômes caractéristiques.

En plus de la propriété de  $\mathbb{G}_m$ -équivariance,  $\chi$  est  $\mathbb{G}$ -invariant par construction. Ceci donne naissance à des morphismes entre champs algébriques

$$[\chi] : [\mathfrak{g}/\mathbb{G}] \rightarrow \mathfrak{c} \text{ et } [\chi/\mathbb{G}_m] : [\mathfrak{g}/\mathbb{G} \times \mathbb{G}_m] \rightarrow [\mathfrak{c}/\mathbb{G}_m].$$

Pour tout  $x \in \mathfrak{g}$ , notons  $I_x$  son centralisateur. Quand  $x$  varie, les groupes  $I_x$  s'organisent en un schéma en groupes  $I$  au-dessus de  $\mathfrak{g}$ . Pour le point générique  $x$  de  $\mathfrak{g}$ ,  $\dim(I_x) = r$  de sorte que les points  $x \in \mathfrak{g}$  tels que  $\dim(I_x) = r$  forment un ouvert de  $\mathfrak{g}$  en vertu du théorème de semi-continuité de la dimension des fibres. On notera  $\mathfrak{g}^{\text{reg}}$  cet ouvert. Rappelons le résultat suivant dû à Kostant *cf.* [35].

**Lemme 1.1.2.** — *La restriction de  $\chi$  à  $\mathfrak{g}^{\text{reg}}$  est un morphisme lisse. Ses fibres géométriques sont des espaces homogènes sous l'action de  $G$ .*

Puisque  $\mathfrak{g}^{\text{reg}}$  est lisse sur  $k$ , la lissité de la restriction de  $\chi$  à  $\mathfrak{g}^{\text{reg}}$  est équivalente à l'existence des sections locales de  $\chi$  passant par n'importe quel point de  $\mathfrak{g}^{\text{reg}}$ . En fait, Kostant a construit une section globale qu'on va maintenant rappeler.

**1.2. Section de Kostant.** — Fixons un épinglage de  $\mathbb{G}$  qui consiste en le choix d'un tore maximal déployé  $\mathbb{T}$ , d'un sous-groupe de Borel  $\mathbb{B}$  contenant  $\mathbb{T}$  de radical unipotent  $\mathbb{U}$  et d'un vecteur  $\mathfrak{x}_+ \in \text{Lie}(\mathbb{U})$  de la forme  $\mathfrak{x}_+ = \sum_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{x}_\alpha$  où  $\Delta$  est l'ensemble des racines simples et où  $\mathfrak{x}_\alpha$  est un vecteur non nul du sous-espace propre  $\text{Lie}(\mathbb{U})_\alpha$  de  $\text{Lie}(\mathbb{U})$  correspondant à la valeur propre  $\alpha$  pour l'action de  $\mathbb{T}$ .

Il existe alors un unique  $\mathfrak{sl}_2$ -triplet  $(h, \mathfrak{x}_+, \mathfrak{x}_-)$  dans  $\mathfrak{g}$  avec l'élément semi-simple  $h \in \mathfrak{t} \cap \text{Lie}(\mathbb{G}^{\text{der}})$ . Rappelons l'énoncé suivant dû à Kostant [35, théorème 0.10].

**Lemme 1.2.1.** — *Soit  $\mathfrak{g}^{\mathfrak{x}_+}$  le centralisateur de  $\mathfrak{x}_+$  dans  $\mathfrak{g}$ . La restriction du morphisme caractéristique  $\chi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{c}$  au sous-espace affine  $\mathfrak{x}_- + \mathfrak{g}^{\mathfrak{x}_+}$  du vectoriel  $\mathfrak{g}$  est un isomorphisme.*

L'inverse de cet isomorphisme

$$(1.2.2) \quad \epsilon : \mathfrak{c} \rightarrow \mathfrak{x}_- + \mathfrak{g}^{\mathfrak{x}_+} \hookrightarrow \mathfrak{g}$$

définit une section du morphisme de Chevalley  $\chi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{c}$  appelée la section de Kostant. En fait, Kostant a construit toute une famille de sections du morphisme de Chevalley. Pour les groupes classiques, il est également possible de construire des sections explicites  $\mathfrak{c} \rightarrow \mathfrak{g}$  à l'aide de l'algèbre linéaire sans utiliser l'épinglage *cf.* [57]. Ces sections, qui généralisent la matrice compagnon dans le cas linéaire, sont probablement plus adaptées aux calculs explicites des fibres de Springer affines et des fibres de Hitchin.

**1.3. Torsion extérieure.** — Pour les applications arithmétiques, il est nécessaire de considérer les formes quasi-déployées du groupe  $\mathbb{G}$ . Fixons un épinglage  $(\mathbb{T}, \mathbb{B}, \mathfrak{x}_+)$  de  $\mathbb{G}$  comme dans 1.2. Notons  $\text{Out}(\mathbb{G})$  le groupe des automorphismes de  $\mathbb{G}$  qui fixent cet épinglage. C'est un groupe discret qui peut être éventuellement infini. Il agit sur l'ensemble des racines  $\Phi$  en laissant stable le sous-ensemble des racines simples. Il agit aussi sur le groupe de Weyl  $\mathbb{W}$  de façon compatible c'est-à-dire qu'on a une action du produit semi-direct  $\mathbb{W} \rtimes \text{Out}(\mathbb{G})$  sur  $\mathbb{T}$  et sur l'ensemble  $\Phi$  des racines.

**Définition 1.3.1.** — *Une forme quasi-déployée de  $\mathbb{G}$  sur un  $k$ -schéma  $X$  est la donnée d'un  $\text{Out}(\mathbb{G})$ -torseur  $\rho_G$  sur  $X$  muni de la topologie étale.*

**1.3.2.** — La donnée de  $\rho_G$  permet de tordre  $\mathbb{G}$  pour obtenir un  $X$ -schéma en groupes réductif lisse  $G = \rho_G \wedge^{\text{Out}(\mathbb{G})} \mathbb{G}$  qui est muni d'un épinglage défini sur  $X$ , c'est-à-dire un triplet  $(T, B, \mathfrak{x}_+)$ , où  $B$  est un sous-schéma en groupes fermé de  $G$  lisse au-dessus de  $X$ ,  $T$  est un sous-tore de  $B$  et  $\mathfrak{x}_+$  est une section globale de  $\text{Lie}(B)$ , tel que fibre par fibre  $(T, B, \mathfrak{x}_+)$  est isomorphe à l'épinglage  $(\mathbb{T}, \mathbb{B}, \mathfrak{x}_+)$ . Inversement tout  $X$ -schéma en groupes lisse réductif muni d'un épinglage  $(T, B, \mathfrak{x}_+)$  et localement isomorphe à  $\mathbb{G}$  pour la topologie étale définit un toseur sous le groupe  $\text{Out}(\mathbb{G})$ . Nous nous permettrons l'abus de langage qui consiste à dire que  $G$  est une forme quasi-déployée en oubliant l'épinglage attaché.

**1.3.3.** — Soient  $\rho_G$  un  $\text{Out}(\mathbb{G})$ -torseur sur  $X$  et  $G$  la forme quasi-déployée attachée avec l'épinglage  $(T, B, \mathfrak{x}_+)$ . Les structures discutées dans les deux paragraphes précédents se transportent sur la forme quasi-déployée. Soient  $\mathfrak{g} = \text{Lie}(G)$  et  $\mathfrak{t} = \text{Lie}(T)$ . L'action de  $\mathbb{W} \rtimes \text{Out}(\mathbb{G})$  sur

$\mathfrak{t}$  induit une action de  $\mathrm{Out}(\mathbb{G})$  sur  $\mathfrak{c} = \mathfrak{t}/\mathbb{W}$ . On définit donc l'espace des polynômes caractéristiques de  $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$  comme le  $X$ -schéma

$$\mathfrak{c} = \rho_G \wedge^{\mathrm{Out}(\mathbb{G})} \mathfrak{c}.$$

Il est muni d'un morphisme

$$\chi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{c}$$

qui se déduit du morphisme de Chevalley  $\chi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{c}$ . Comme  $\mathrm{Out}(\mathbb{G})$  fixe le  $\mathfrak{sl}_2$ -triplet  $(h, \mathfrak{x}_+, \mathfrak{x}_-)$ , la section de Kostant  $\epsilon : \mathfrak{c} \rightarrow \mathfrak{g}$  est  $\mathrm{Out}(\mathbb{G})$ -équivariant. Par torsion, on obtient un  $X$ -morphisme

$$(1.3.4) \quad \epsilon : \mathfrak{c} \rightarrow \mathfrak{g}$$

section du morphisme de Chevalley  $\chi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{c}$  qu'on appellera aussi section de Kostant. On a par ailleurs un morphisme fini plat

$$\pi : \mathfrak{t} \rightarrow \mathfrak{c}$$

qui se déduit de  $\pi : \mathfrak{t} \rightarrow \mathfrak{c}$ . Le  $X$ -schéma en groupes fini étale

$$W = \rho_G \wedge^{\mathrm{Out}(\mathbb{G})} \mathbb{W}$$

agit sur  $\mathfrak{t}$ . Comme  $\mathfrak{c}$  est le quotient de  $\mathfrak{t}$  par  $\mathbb{W}$  au sens des invariants,  $\mathfrak{c}$  est aussi le quotient de  $\mathfrak{t}$  par  $W$  au sens des invariants. Au-dessus de l'ouvert  $\mathfrak{c}^{\mathrm{rs}} = \rho_G \wedge^{\mathrm{Out}(\mathbb{G})} \mathfrak{c}$ , le morphisme  $\pi : \mathfrak{t}^{\mathrm{rs}} \rightarrow \mathfrak{c}^{\mathrm{rs}}$  est un torseur sous le schéma en groupes fini étale  $W$ .

**1.3.5.** — Pour étudier les groupes endoscopiques, il est nécessaire de considérer les réductions du  $\mathrm{Out}(\mathbb{G})$ -torseur  $\rho_G$ . Une réduction de  $\rho_G$  est un torseur  $\rho : X_\rho \rightarrow X$  sous un groupe discret  $\Theta_\rho$  muni d'un homomorphisme  $\mathbf{o}_\mathbb{G} : \Theta_\rho \rightarrow \mathrm{Out}(\mathbb{G})$  tel que

$$(1.3.6) \quad \rho \wedge^{\Theta_\rho} \mathrm{Out}(\mathbb{G}) = \rho_G.$$

On a alors  $\mathfrak{t} = X_\rho \wedge^{\Theta_\rho} \mathfrak{t}$  et  $\mathfrak{c} = X_\rho \wedge^{\Theta_\rho} \mathfrak{c}$  et un diagramme cartésien

$$(1.3.7) \quad \begin{array}{ccc} X_\rho \times \mathfrak{t} & \xrightarrow{\pi} & X_\rho \times \mathfrak{c} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathfrak{t} & \xrightarrow{\pi} & \mathfrak{c} \end{array}$$

dans lequel les deux flèches verticales sont des  $\Theta_\rho$ -torseurs. Le produit semi-direct  $\mathbb{W} \rtimes \Theta_\rho$  agit sur  $X_\rho \times \mathfrak{t}$  et agit librement sur l'ouvert  $X_\rho \times \mathfrak{t}^{\mathrm{rs}}$ . La flèche diagonale dans le diagramme ci-dessus

$$(1.3.8) \quad \pi_\rho : X_\rho \times \mathfrak{t} \rightarrow \mathfrak{c}$$

est alors un morphisme fini plat  $\mathbb{W} \rtimes \Theta_\rho$ -invariant qui réalise  $\mathfrak{c}$  comme le quotient de  $X_\rho \times \mathfrak{t}$  par  $\mathbb{W} \rtimes \Theta_\rho$  au sens des invariants. Au-dessus de l'ouvert  $\mathfrak{c}^{\text{rs}}$ ,  $\pi_\rho$  est un morphisme fini étale galoisien de groupe de Galois  $\mathbb{W} \rtimes \Theta_\rho$ . Il est souvent commode dans les calculs de remplacer le tore  $\mathfrak{t}^{\text{rs}} \rightarrow \mathfrak{c}^{\text{rs}}$  sous le schéma en groupes fini étale  $W$  par le tore  $X_\rho \times \mathfrak{t}^{\text{rs}} \rightarrow \mathfrak{c}^{\text{rs}}$  sous le groupe constant  $\mathbb{W} \rtimes \Theta_\rho$ .

**1.3.9.** — Il est parfois commode de passer du langage des tores au langage plus concret des représentations du groupe fondamental. Soient  $x$  un point géométrique de  $X$  et  $\pi_1(X, x)$  le groupe fondamental de  $X$  pointé par  $x$ . Soit  $x_{\text{Out}}$  un point géométrique de  $\rho_G$  au-dessus de  $x$ . La donnée de ce point définit un homomorphisme

$$\rho_G^\bullet : \pi_1(X, x) \rightarrow \text{Out}(\mathbb{G}).$$

Une réduction  $\rho \wedge^{\Theta_\rho} \text{Out}(\mathbb{G}) = \rho_G$  cf. 1.3.6 pointée est la donnée d'un point géométrique  $x_\rho$  de  $X_\rho$  au-dessus de  $x_{\text{Out}}$ . Cela revient à donner un homomorphisme  $\rho^\bullet : \pi_1(X, x) \rightarrow \Theta_\rho$  dans le diagramme commutatif

$$(1.3.10) \quad \begin{array}{ccc} \pi_1(X, x) & \xrightarrow{\rho^\bullet} & \Theta_\rho \\ & \searrow \rho_G^\bullet & \downarrow \mathfrak{o}_G \\ & & \text{Out}(\mathbb{G}) \end{array}$$

où  $\mathfrak{o}_G : \Theta_\rho \rightarrow \text{Out}(\mathbb{G})$  est l'homomorphisme de réduction.

**1.4. Centralisateur régulier semi-simple.** — Notons  $\mathfrak{g}^{\text{rs}}$  l'image réciproque de l'ouvert  $\mathfrak{c}^{\text{rs}}$  par le morphisme  $\chi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{c}$ . Pour tout  $a \in \mathfrak{c}^{\text{rs}}(\bar{k})$ , il est bien connu que la fibre  $\chi^{-1}(a)$  est formée d'une seule orbite sous l'action adjointe de  $G$ . Pour tout  $\gamma \in \mathfrak{g}^{\text{rs}}(\bar{k})$ , le centralisateur  $I_\gamma$  de  $\gamma$  est un tore maximal de  $G \otimes_k \bar{k}$ .

**1.4.1.** — Soient  $a \in \mathfrak{c}^{\text{rs}}(\bar{k})$  et  $\gamma, \gamma' \in \chi^{-1}(a)$ . Il existe alors  $g \in G(\bar{k})$  qui transporte  $\gamma$  sur  $\gamma'$  c'est-à-dire tel que  $\text{ad}(g)\gamma = \gamma'$ . L'automorphisme intérieur  $\text{ad}(g)$  définit donc un isomorphisme  $\text{ad}(g) : I_\gamma \xrightarrow{\sim} I_{\gamma'}$ . De plus, si  $g$  et  $g'$  sont deux éléments de  $G(\bar{k})$  qui transportent  $\gamma$  sur  $\gamma'$ , alors  $g$  et  $g'$  diffèrent par un élément de  $I_\gamma$ . Comme  $I_\gamma$  est un tore, en particulier commutatif, les deux isomorphismes

$$\text{ad}(g) \text{ et } \text{ad}(g') : I_\gamma \xrightarrow{\sim} I_{\gamma'}$$

sont les mêmes. Ceci démontre que les tores  $I_\gamma$  et  $I_{\gamma'}$  sont canoniquement isomorphes. Ceci définit donc un tore qui ne dépend que de  $a$  et qui

est canoniquement isomorphe à  $I_\gamma$  pour tout  $\gamma \in \chi^{-1}(a)$ . Ce tore peut être décrit directement à partir de  $a$  à coefficients arbitraires de la façon suivante.

Soient  $S$  un  $X$ -schéma et  $a \in \mathfrak{c}^{\text{rs}}(S)$  un  $S$ -point de  $\mathfrak{c}^{\text{rs}}$ . On appellera *revêtement caméral* associé à  $a$  le  $W$ -torseur  $\pi_a : \tilde{S}_a \rightarrow S$  obtenu en formant le diagramme cartésien

$$\begin{array}{ccc} \tilde{S}_a & \longrightarrow & \mathfrak{t}^{\text{rs}} \\ \pi_a \downarrow & & \downarrow \pi \\ S & \xrightarrow{a} & \mathfrak{c}^{\text{rs}} \end{array}$$

Posons

$$(1.4.2) \quad J_a = \pi_a \wedge^W T.$$

Ce lemme est un cas particulier probablement bien connu d'un résultat de Donagi et Gaitsgory. On rappellera l'énoncé plus général dans le paragraphe 2.4.

**Lemme 1.4.3.** — *Soient  $S$  un  $X$ -schéma et  $a \in \mathfrak{c}^{\text{rs}}(S)$  un  $S$ -point de  $\mathfrak{c}^{\text{rs}}$ . Soient  $x$  un  $S$ -point de  $\mathfrak{g}^{\text{rs}}(S)$  tel que  $\chi(x) = a$  et  $I_x$  l'image réciproque du centralisateur sur  $\mathfrak{g}$ . Alors on a un isomorphisme canonique  $J_a = I_x$ .*

**1.4.4.** — Voici une variante de la construction ci-dessus. Considérons une réduction  $\rho \wedge^{\Theta_\rho} \text{Out}(\mathbb{G}) = \rho_G$  du torseur  $\rho_G$  cf. 1.3.6. Reprenons les notations de cf. 1.3.6. Soit  $\pi_{\rho,a} : \tilde{S}_{\rho,a} \rightarrow S$  l'image réciproque par  $a : S \rightarrow \mathfrak{c}^{\text{rs}}$  du revêtement  $\pi_\rho : X_\rho \times \mathfrak{t} \rightarrow \mathfrak{c}$  cf. 1.3.8. Le morphisme  $\pi_{\rho,a} : \tilde{S}_{\rho,a} \rightarrow S$  est alors un torseur sous le groupe  $\mathbb{W} \rtimes \Theta_\rho$ . On a alors une définition équivalente de  $J_a$

$$(1.4.5) \quad J_a = \pi_{\rho,a} \wedge^{\mathbb{W} \rtimes \Theta_\rho} \mathbb{T}.$$

**1.5. Classes de conjugaison dans une classe stable.** — Dans ce paragraphe,  $G$  sera une forme quasi-déployée de  $\mathbb{G}$  sur un corps  $F$  contenant  $k$ . Nous entendrons par classe de conjugaison stable semi-simple régulière de  $\mathfrak{g}$  sur  $F$  un élément  $a \in \mathfrak{c}^{\text{rs}}(F)$ . La définition originale de Langlands des classes de conjugaison stable est plus compliquée mais une fois restreinte aux éléments semi-simples réguliers de l'algèbre de Lie, elle coïncide avec la nôtre. Comme nous nous limitons aux classes de conjugaison stable semi-simples régulières, dans la suite de l'article, par

classe de conjugaison stable, nous entendrons semi-simple régulière sauf mention expresse du contraire.

**1.5.1.** — Soit  $a \in \mathfrak{c}^{\text{rs}}(F)$  une classe de conjugaison stable. Soit  $\gamma_0 = \epsilon(a) \in \mathfrak{g}(F)$  l'image de  $a$  par la section de Kostant. Le centralisateur  $I_{\gamma_0}$  de  $\gamma_0$  est un tore défini sur  $F$  canoniquement isomorphe au tore  $J_a$  défini dans le paragraphe précédent cf. 1.4.3. Soit  $\gamma$  un autre  $F$ -point de  $\chi^{-1}(a)$ . Comme éléments de  $\mathfrak{g}(\overline{F})$ ,  $\gamma_0$  et  $\gamma$  sont conjugués c'est-à-dire qu'il existe  $g \in G(\overline{F})$  tel que  $\gamma = \text{ad}(g)\gamma_0$ . Cette identité implique que pour tout  $\sigma \in \text{Gal}(\overline{F}/F)$ ,  $g^{-1}\sigma(g) \in I_{\gamma_0}(\overline{F})$ . L'application  $\sigma \mapsto g^{-1}\sigma(g)$  définit un élément

$$\text{inv}(\gamma_0, \gamma) \in H^1(F, I_{\gamma_0})$$

qui ne dépend que de la classe de  $G(F)$ -conjugaison de  $\gamma$  et non du choix du transporteur  $g$ . L'image de cette classe dans  $H^1(F, G)$  est triviale par construction. D'après Langlands, l'application  $\gamma \mapsto \text{inv}(\gamma_0, \gamma)$  définit une bijection de l'ensemble des classes de  $G(F)$ -conjugaison dans l'ensemble des  $F$ -points de  $\chi^{-1}(a)$  sur la fibre de l'application  $H^1(F, I_{\gamma_0}) \rightarrow H^1(F, G)$  au-dessus de l'élément neutre cf. [48]. Cette fibre sera notée

$$\ker(H^1(F, I_{\gamma_0}) \rightarrow H^1(F, G)).$$

**1.5.2.** — Au lieu de  $\mathfrak{g}(F)$ , il est souvent nécessaire de considérer le groupoïde  $[\mathfrak{g}/G](F)$  des couples  $(E, \phi)$  composé d'un  $G$ -torseur  $E$  sur  $F$  et d'un  $F$ -point  $\phi$  de  $\text{ad}(E) = E \wedge^G \mathfrak{g}$ . Le morphisme de Chevalley définit un foncteur  $[\chi]$  de  $[\mathfrak{g}/G](F)$  dans l'ensemble  $\mathfrak{c}(F)$ . Soit  $a \in \mathfrak{c}^{\text{rs}}(F)$ . Considérons le groupoïde des  $F$ -points de  $[\chi]^{-1}(a)$ . Les objets de  $[\chi]^{-1}(a)(F)$  sont localement isomorphes pour la topologie étale. Par ailleurs, on a un point base  $(E_0, \gamma_0)$  du groupoïde où  $E_0$  est le  $G$ -torseur trivial et où  $\gamma_0 \in \mathfrak{g}(F)$  est l'élément  $\gamma_0 = \epsilon(a)$  défini par la section de Kostant. Pour tout  $F$ -point  $(E, \phi)$  de  $[\chi]^{-1}(a)$ , on obtient un invariant

$$\text{inv}((E_0, \gamma_0), (E, \phi)) \in H^1(F, I_{\gamma_0}).$$

L'application  $(E, \phi) \mapsto \text{inv}((E_0, \gamma_0), (E, \phi))$  définit une bijection de l'ensemble des classes d'isomorphisme de  $[\chi]^{-1}(a)(F)$  sur  $H^1(F, I_{\gamma_0})$ .

Soient  $(E, \phi)$  un  $F$ -point de  $[\chi]^{-1}(a)$  et  $\text{inv}((E_0, \gamma_0), (E, \phi))$  son invariant. La classe d'isomorphisme de  $E$  correspond alors à l'image de cet invariant dans  $H^1(F, G)$  par l'application

$$H^1(F, I_{\gamma_0}) \rightarrow H^1(F, G).$$

On retrouve ainsi la bijection mentionnée plus haut entre les classes de  $G(F)$ -conjugaison dans  $\chi^{-1}(a)(F)$  et le sous-ensemble de  $H^1(F, I_{\gamma_0})$  des éléments d'image triviale dans  $H^1(F, G)$ .

**1.6. Dualité de Tate-Nakayama.** — La discussion du paragraphe précédent prend une forme très explicite dans le cas d'un corps local non-archimédien grâce à la dualité de Tate-Nakayama. Soient  $F_v$  un corps local non-archimédien,  $\mathcal{O}_v$  son anneau des entiers et  $v$  la valuation. Soit  $F_v^{\text{sep}}$  une clôture séparable de  $F_v$ . Notons  $\Gamma_v$  le groupe de Galois  $\text{Gal}(F_v^{\text{sep}}/F_v)$ . Notons  $X = \text{Spec}(F_v)$  et  $x$  le point géométrique choisi.

**1.6.1.** — Soit  $G$  la forme quasi-déployée sur  $F_v$  de  $\mathbb{G}$  associée à un homomorphisme  $\rho_G^\bullet : \Gamma_v \rightarrow \text{Out}(\mathbb{G})$ . Soit  $\hat{\mathbb{G}}$  le dual complexe de  $\mathbb{G}$ . Par définition il est muni d'un épinglage  $(\hat{\mathbb{T}}, \hat{\mathbb{B}}, \hat{\mathbb{x}})$  dont la donnée radicielle associée s'obtient à partir de celle de  $\mathbb{G}$  en échangeant les racines et les coracines. En particulier  $\text{Out}(\mathbb{G}) = \text{Out}(\hat{\mathbb{G}})$ . On dispose donc d'une action  $\rho_G^\bullet$  de  $\Gamma_v$  sur  $\hat{\mathbb{G}}$  fixant l'épinglage.

D'après Kottwitz cf. [38] et [41], on a alors

$$H^1(F, G)^* = \pi_0((Z_{\hat{\mathbb{G}}})^{\rho_G^\bullet(\Gamma_v)})$$

où  $(Z_{\hat{\mathbb{G}}})^{\rho_G^\bullet(\Gamma_v)}$  est le sous-groupe des points fixes dans le centre  $Z_{\hat{\mathbb{G}}}$  de  $\hat{\mathbb{G}}$  sous l'action de  $\rho_G^\bullet(\Gamma_v)$ . En particulier,  $H^1(F_v, G)^*$  est un groupe abélien de type fini.

**1.6.2.** — Mettons-nous dans la situation de 1.3.10. En particulier, on a un revêtement fini étale galosien  $\rho : X_\rho \rightarrow X$  de groupe de Galois  $\Theta_\rho$  avec un point  $x_\rho \in X_\rho$  au-dessus de  $x$ . Pour tout  $a \in \mathfrak{c}^{\text{rs}}(F_v)$ , on a un  $\mathbb{W} \rtimes \Theta_\rho$ -torseur  $\pi_{\rho,a} : \tilde{X}_{\rho,a} \rightarrow X$  qui provient de 1.3.8. Choisissons un point  $x_{\rho,a}$  de  $\tilde{X}_{\rho,a}$  au-dessus de  $x_\rho$ .

On a alors un homomorphisme  $\pi_{\rho,a}^\bullet : \Gamma_v \rightarrow \mathbb{W} \rtimes \Theta_\rho$  rendant commutatif le diagramme

$$(1.6.3) \quad \begin{array}{ccc} \Gamma_v & \xrightarrow{\pi_{\rho,a}^\bullet} & \mathbb{W} \rtimes \Theta_\rho \\ & \searrow \rho_G^\bullet & \downarrow \\ & & \Theta_\rho \end{array}$$

Soit  $\gamma_0 = \epsilon(a)$  la section de Kostant appliquée à  $a$ . D'après le lemme 1.4.3 on a

$$I_{\gamma_0} = J_a = \pi_{\rho,a} \wedge^{\mathbb{W} \rtimes \Theta_\rho} \mathbb{T}.$$



D'après la dualité de Tate et Nakayama locale [41, 1.1], on a alors

$$(1.6.4) \quad H^1(F_v, J_a)^* = \pi_0(\hat{\mathbb{T}}^{\pi_{\rho,a}^\bullet(\Gamma_v)}).$$

Autrement dit le groupe des caractères complexes de  $H^1(F_v, J_a)$  coïncide avec le groupe des composantes connexes du groupe des points fixes de  $\pi_{\rho,a}^\bullet(\Gamma_v)$  dans  $\hat{\mathbb{T}}$ . Ici  $\hat{\mathbb{T}}$  désigne le tore complexe dual de  $\mathbb{T}$  défini en échangeant le groupe des caractères et le groupe des cocaractères.

**1.6.5.** — L'inclusion  $\iota : \hat{\mathbb{T}} \hookrightarrow \hat{\mathbb{G}}$  est  $\Gamma$ -équivariante modulo conjugaison c'est-à-dire que pour tout  $t \in \hat{\mathbb{T}}$  pour tout  $\sigma \in \Gamma_v$ ,  $\rho^\bullet(\sigma)(\iota(t))$  et  $\iota(\pi_a^\bullet(\sigma)(t))$  sont conjugués dans  $\hat{\mathbb{G}}$ . On en déduit l'inclusion

$$(Z_{\hat{\mathbb{G}}})^{\rho_G^\bullet(\Gamma_v)} \subset \hat{\mathbb{T}}^{\pi_a^\bullet(\Gamma_v)}$$

qui induit un homomorphisme entre les groupes de composantes connexes

$$\pi_0((Z_{\hat{\mathbb{G}}})^{\rho_G^\bullet(\Gamma_v)}) \rightarrow \pi_0(\hat{\mathbb{T}}^{\pi_a^\bullet(\Gamma_v)}).$$

Par dualité on retrouve la flèche  $H^1(F_v, I_{\gamma_0}) \rightarrow H^1(F_v, G)$  définie dans le paragraphe précédent.

**1.7.  $\kappa$ -intégrales orbitales.** — Gardons les notations du paragraphe précédent. Supposons en plus que  $G$  soit donné comme forme quasi-déployée de  $\mathbb{G}$  sur  $\mathcal{O}_v$ . Le groupe localement compact  $G(F_v)$  est alors muni d'un sous-groupe ouvert compact maximal  $G(\mathcal{O}_v)$ . Soit  $dg_v$  la mesure de Haar de  $G(F_v)$  normalisée de sorte que  $G(\mathcal{O}_v)$  soit de volume un.

Pour  $a \in \mathfrak{c}^{\text{rs}}(F_v)$ , donnons-nous une mesure de Haar  $dt_v$  sur le tore  $J_a(F_v)$ . Pour tout  $\gamma \in \mathfrak{g}(F_v)$  avec  $\chi(\gamma) = a$ , l'isomorphisme canonique  $J_a = I_\gamma$  permet de transporter la mesure de Haar  $dt_v$  de  $J_a(F_v)$  en une mesure de Haar sur  $I_\gamma(F_v)$ .

Pour tout  $\gamma$  comme ci-dessus, pour toute fonction localement constante  $f$  à support compact sur  $\mathfrak{g}(F_v)$ , on peut alors définir l'intégrale orbitale

$$\mathbf{O}_\gamma(f, dt_v) = \int_{I_\gamma(F_v) \backslash G(F_v)} f(\text{ad}(g_v)^{-1}\gamma) \frac{dg_v}{dt_v}.$$

**Définition 1.7.1.** — Soit  $\kappa$  un élément de  $\hat{\mathbb{T}}^{\pi_a^\bullet(\Gamma_v)}$ . Pour toute fonction  $f$  localement constante à support compact dans  $\mathfrak{g}(F_v)$ , on définit la  $\kappa$ -intégrale orbitale de  $f$  sur la classe de conjugaison stable  $a \in \mathfrak{c}(F_v)$  par la formule

$$\mathbf{O}_a^\kappa(f, dt_v) = \sum_{\gamma} \langle \text{inv}(\gamma_0, \gamma), \kappa \rangle \mathbf{O}_\gamma(f, dt_v)$$

où  $\gamma$  parcourt l'ensemble des classes de  $G(F_v)$ -conjugaison dans la classe stable de caractéristique  $a$ , où le point base  $\gamma_0 = \epsilon(a)$  est défini par la section de Kostant et où  $dt_v$  est une mesure de Haar du tore  $J_a(F_v)$ .

Notons pour mémoire que la définition de la  $\kappa$ -intégrale orbitale dépend du choix du point géométrique  $x_{\rho,a}$  dans  $\tilde{X}_{\rho,a}$  sans lequel on ne peut pas relier le groupe de cohomologie  $H^1(F_v, J_a)$  avec le tore dual  $\hat{T}$  et donc exprimer la dualité de Tate-Nakayama sous la forme 1.6.4.

**1.8. Groupes endoscopiques.** — Par construction, le groupe dual  $\hat{G}$  est muni d'un épinglage  $(\hat{T}, \hat{B}, \hat{x}_+)$ . Soit  $\kappa$  un élément du tore maximal  $\hat{T}$  dans cet épinglage. La composante neutre du centralisateur de  $\kappa$  dans  $\hat{G}$  est un sous-groupe réductif qu'on notera  $\hat{H}$ . L'épinglage de  $\hat{G}$  induit sur  $\hat{H}$  un épinglage avec le même tore maximal  $\hat{T}$ . Soit  $H$  le groupe réductif déployé sur  $k$  muni d'un épinglage dont le dual complexe est  $\hat{H}$  muni de son épinglage. On a alors  $\text{Out}(H) = \text{Out}(\hat{H})$ .

Considérons le centralisateur  $(\hat{G} \rtimes \text{Out}(G))_\kappa$  de  $\kappa$  dans le produit semi-direct  $\hat{G} \rtimes \text{Out}(G)$ . On a la suite exacte

$$1 \rightarrow \hat{H} \rightarrow (\hat{G} \rtimes \text{Out}(G))_\kappa \rightarrow \pi_0(\kappa) \rightarrow 1$$

où  $\pi_0(\kappa)$  est le groupe des composantes connexes de  $(\hat{G} \rtimes \text{Out}(G))_\kappa$ . On a alors des homomorphismes canoniques

$$\begin{array}{ccc} & \pi_0(\kappa) & \\ \swarrow \text{\textbf{o}}_H(\kappa) & & \searrow \text{\textbf{o}}_G(\kappa) \\ \text{Out}(H) & & \text{Out}(G) \end{array}$$

**Définition 1.8.1.** — Soit  $G$  une forme quasi-déployée de  $G$  sur  $X$  donnée par un  $\text{Out}(G)$ -torseur  $\rho_G$ . Une donnée endoscopique de  $G$  sur  $X$  est un couple  $(\kappa, \rho_\kappa)$  avec  $\kappa$  comme ci-dessus et où  $\rho_\kappa$  est un  $\pi_0(\kappa)$ -torseur qui induit  $\rho_G$  par le changement de groupes de structure  $\text{\textbf{o}}_G(\kappa)$ .

Le groupe endoscopique associé à la donnée endoscopique  $(\kappa, \rho_\kappa)$  est la forme quasi-déployée  $H$  sur  $X$  de  $H$  donnée par le  $\text{Out}(H)$ -torseur  $\rho_H$  obtenu à partir de  $\rho_\kappa$  par le changement de groupes de structure  $\text{\textbf{o}}_H(\kappa)$ .

Il y a une variante pointée de la notion de donnée endoscopique qui est utile. Soit  $X$  un schéma avec un point géométrique  $x$ . Soit  $G$  un groupe réductif connexe  $X$  forme quasi-déployée du groupe constant  $G$  définie par un homomorphisme  $\rho_G^\bullet : \pi_1(X, x) \rightarrow \text{Out}(G)$ .

**Définition 1.8.2.** — On appelle donnée endoscopique pointée de  $G$  sur  $X$  un couple  $(\kappa, \rho_\kappa^\bullet)$  où  $\kappa \in \hat{\mathbb{T}}$  et  $\rho_\kappa^\bullet$  est un homomorphisme

$$\rho_\kappa^\bullet : \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_0(\kappa)$$

au-dessus de  $\rho_G^\bullet$ .

Avec une donnée endoscopique pointée, on peut former un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} & \pi_1(X, x) & \\ \rho_H^\bullet \swarrow & \downarrow \rho_\kappa^\bullet & \searrow \rho_G^\bullet \\ & \pi_0(\kappa) & \\ \mathbf{o}_H(\kappa) \swarrow & & \searrow \mathbf{o}_G(\kappa) \\ \text{Out}(\mathbb{H}) & & \text{Out}(\mathbb{G}) \end{array}$$

Le groupe endoscopique  $H$  associé à la donnée endoscopique pointée  $(\kappa, \rho_\kappa^\bullet)$  peut être alors formé à l'aide de l'homomorphisme  $\rho_H^\bullet$ .

**1.9. Transfert des classes de conjugaison stable.** — Soit  $(\kappa, \rho_\kappa)$  une donnée endoscopique comme dans 1.8.1. Soit  $H$  le groupe endoscopique associé. On va maintenant définir le transfert des classes de conjugaison stable de  $H$  à  $G$  en construisant un morphisme  $\nu : \mathfrak{c}_H \rightarrow \mathfrak{c}$ .

Par construction, on dispose d'une réduction simultanée des toseurs  $\rho_G$  et  $\rho_H$  au toseur

$$\rho_\kappa : X_{\rho_\kappa} \rightarrow X$$

sous le groupe  $\pi_0(\kappa)$ . On peut alors réaliser  $\mathfrak{c}$  comme le quotient au sens des invariants de  $X_{\rho_\kappa} \times \mathfrak{t}$  par l'action de  $\mathbb{W} \rtimes \pi_0(\kappa)$  cf. 1.3.8. De même, on peut réaliser  $\mathfrak{c}_H$  comme le quotient au sens des invariants de  $X_{\rho_\kappa} \times \mathfrak{t}$  par l'action de  $\mathbb{W}_H \rtimes \pi_0(\kappa)$ . Pour définir le morphisme  $\mathfrak{c}_H \rightarrow \mathfrak{c}$  il suffit de définir un homomorphisme

$$\mathbb{W}_H \rtimes \pi_0(\kappa) \rightarrow \mathbb{W} \rtimes \pi_0(\kappa)$$

compatible avec l'action sur  $X_{\rho_\kappa} \times \mathfrak{t}$  ce qui nous conduit au lemme suivant.

**Lemme 1.9.1.** — Soit  $\mathbb{W}_H \rtimes \pi_0(\kappa)$  le produit semi-direct défini par  $\mathbf{o}_H(\kappa) : \pi_0(\kappa) \rightarrow \text{Out}(\mathbb{H})$ . Soit  $\mathbb{W} \rtimes \pi_0(\kappa)$  le produit semi-direct défini par  $\mathbf{o}_G(\kappa) : \pi_0(\kappa) \rightarrow \text{Out}(\mathbb{G})$ . Il existe un homomorphisme canonique

$$\mathbb{W}_H \rtimes \pi_0(\kappa) \rightarrow \mathbb{W} \rtimes \pi_0(\kappa)$$

qui induit l'homomorphisme évident sur les sous-groupes normaux  $\mathbb{W}_{\mathbb{H}} \subset \mathbb{W}$ , induit l'identité sur le quotient  $\pi_0(\kappa)$  et qui est compatible avec les actions de  $\mathbb{W}_{\mathbb{H}} \rtimes \pi_0(\kappa)$  et  $\mathbb{W} \rtimes \pi_0(\kappa)$  sur  $\mathfrak{t}$ .

*Démonstration.* — Rappelons que le centralisateur  $(\mathbb{W} \rtimes \text{Out}(\mathbb{G}))_{\kappa}$  de  $\kappa$  dans  $\mathbb{W} \rtimes \text{Out}(\mathbb{G})$  est canoniquement isomorphe au produit semi-direct  $\mathbb{W}_{\mathbb{H}} \rtimes \pi_0(\kappa)$  cf. [55, lemme 10.1]. On en déduit un homomorphisme  $\theta : \pi_0(\kappa) \rightarrow \mathbb{W} \rtimes \text{Out}(\mathbb{G})$  de sorte qu'on a un homomorphisme de groupes

$$\mathbb{W}_{\mathbb{H}} \rtimes \pi_0(\kappa) \rightarrow \mathbb{W} \rtimes^{\theta} \pi_0(\kappa)$$

où le second produit semi-direct est formé à l'aide de l'action de  $\pi_0(\kappa)$  sur  $\mathbb{W}$  définie par l'homomorphisme  $\theta : \pi_0(\kappa) \rightarrow \mathbb{W} \rtimes \text{Out}(\mathbb{G})$  et de l'action de  $\mathbb{W} \rtimes \text{Out}(\mathbb{G})$  sur  $\mathbb{W}$ . Cet homomorphisme est visiblement compatible avec les actions sur  $\mathfrak{t}$ .

Il reste à construire un isomorphisme entre produits semi-directs

$$\mathbb{W} \rtimes^{\theta} \pi_0(\kappa) \rightarrow \mathbb{W} \rtimes \pi_0(\kappa)$$

dont le second est formé à l'aide de l'homomorphisme  $\mathbf{o}_{\mathbb{G}}(\kappa) : \pi_0(\kappa) \rightarrow \text{Out}(\mathbb{G})$ . Pour tout  $\alpha \in \pi_0(\kappa)$ , l'élément  $\theta(\alpha) \in \mathbb{W} \rtimes \text{Out}(\mathbb{G})$  s'écrit de manière unique sous la forme  $\theta(\alpha) = w(\alpha)\mathbf{o}_{\mathbb{G}}(\alpha)$  où  $w(\alpha) \in \mathbb{W}$ . Ceci nous permet de définir un homomorphisme

$$\pi_0(\kappa) \rightarrow \mathbb{W} \rtimes \pi_0(\kappa)$$

par la formule  $\alpha \mapsto w(\alpha)\alpha$ . Cet homomorphisme induit un isomorphisme  $\mathbb{W} \rtimes^{\theta} \pi_0(\kappa) \rightarrow \mathbb{W} \rtimes \pi_0(\kappa)$  qui rend le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{W} \rtimes^{\theta} \pi_0(\kappa) & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & \mathbb{W} \rtimes \pi_0(\kappa) \\ & \searrow \quad \quad \swarrow & \\ & \mathbb{W} \rtimes \text{Out}(\mathbb{G}) & \end{array}$$

commutatif. En particulier, cet isomorphisme est compatible avec les actions sur  $\mathfrak{t}$ .  $\square$

Au-dessus de l'ouvert semi-simple régulier  $\mathfrak{c}^{\text{rs}}$  de  $\mathfrak{c}$ , on a un morphisme fini et étale

$$\nu^{\text{rs}} : \mathfrak{c}_H^{G-\text{rs}} \rightarrow \mathfrak{c}^{\text{rs}}$$

où on a noté  $\mathfrak{c}_H^{G-\text{rs}}$  l'image réciproque de  $\mathfrak{c}^{\text{rs}}$  dans  $\mathfrak{c}_H$ . Ce morphisme réalise le transfert des classes de conjugaison stable de  $H$  qui sont semi-simples et  $G$ -régulières vers les classes de conjugaison stable de  $G$  qui sont semi-simples régulières.

**Lemme 1.9.2.** — Soient  $a_H \in \mathfrak{c}_H^{G-\text{rs}}(S)$  un point à valeur dans un schéma  $S$  et  $a \in \mathfrak{c}^{\text{rs}}(S)$  son image. Alors, on a un isomorphisme canonique entre le tore  $J_a$  défini par la formule 1.4.2 et le tore  $J_{H,a_H}$  défini par la même formule appliquée à  $H$ .

*Démonstration.* — En prenant l'image inverse de 1.3.8 par  $a$ , on a un  $\mathbb{W} \rtimes \pi_0(\kappa)$ -torseur  $\pi_{\rho_\kappa, a}$  sur  $S$ . De même, on a un  $\mathbb{W}_H \rtimes \pi_0(\kappa)$ -torseur  $\pi_{\rho_\kappa, a_H}$  sur  $S$ . Par construction même du morphisme  $\nu : \mathfrak{c}_H \rightarrow \mathfrak{c}$ , on a un morphisme

$$\pi_{\rho_\kappa, a_H} \rightarrow \pi_{\rho_\kappa, a}$$

compatible aux actions de  $\mathbb{W}_H \rtimes \pi_0(\kappa)$  et de  $\mathbb{W} \rtimes \pi_0(\kappa)$ . Par conséquent, le deuxième torseur se déduit du premier par le changement de groupes de structure  $\mathbb{W}_H \rtimes \pi_0(\kappa) \rightarrow \mathbb{W} \rtimes \pi_0(\kappa)$  cf. 1.9.1. Il suffit maintenant d'appliquer la formule 1.4.5.  $\square$

**Remarque 1.9.3.** — Soit maintenant  $S = \text{Spec}(F_v)$  où  $F_v$  est un corps local comme dans 1.6. En choisissant un  $F_v^{\text{sep}}$ -point  $x_{\rho_\kappa, a}$  dans le torseur  $\pi_{\rho_\kappa, a_H}$ , on obtient un homomorphisme  $\pi_{\rho_\kappa, a_H}^\bullet : \Gamma_v \rightarrow \mathbb{W}_H \rtimes \pi_0(\kappa)$ . On a alors la dualité de Tate-Nakayama 1.6.4

$$H^1(F_v, J_a)^* = H^1(F_v, J_{H,a_H})^* = \hat{\mathbb{T}}^{\pi_{\rho_\kappa, a_H}^\bullet(\Gamma_v)}.$$

Par construction,  $\kappa \in \hat{\mathbb{T}}^{\mathbb{W}_H \rtimes \pi_0(\kappa)}$  de sorte qu'on peut définir la  $\kappa$ -intégrale orbitale  $\mathbf{O}_a(f, dt_v)$  suivant 1.7.1.

**1.10. Discriminant et résultant.** — Soit  $\Phi$  le système de racines associé au groupe déployé  $\mathbb{G}$ . Pour toute racine  $\alpha \in \Phi$ , on note  $d\alpha \in k[\mathfrak{t}]$  la dérivée du caractère  $\alpha : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{G}_m$ . Formons le discriminant

$$\underline{\mathfrak{D}}_{\mathbb{G}} = \prod_{\alpha \in \Phi} d\alpha \in k[\mathfrak{t}]$$

qui est clairement un élément  $\mathbb{W}$ -invariant de cette algèbre de polynômes. Il définit donc une fonction sur l'espace des polynômes caractéristiques  $\mathfrak{c} = \text{Spec}(k[\mathfrak{t}]^{\mathbb{W}})$ . Soit  $\mathfrak{D}_{\mathbb{G}}$  le diviseur de  $\mathfrak{c}$  défini par cette fonction. Rappelons l'énoncé bien connu.

**Lemme 1.10.1.** — Le diviseur  $\mathfrak{D}_{\mathbb{G}}$  est un diviseur réduit de  $\mathfrak{c}$  stable sous l'action de  $\text{Out}(\mathbb{G})$ . L'ouvert complémentaire de ce diviseur est l'ouvert régulier semi-simple  $\mathfrak{c}^{\text{rs}}$ .

*Démonstration.* — L'image inverse de  $\mathfrak{D}_{\mathbb{G}}$  est le diviseur des hyperplans de  $\mathfrak{t}$  définis par les racines, chaque hyperplan étant de multiplicité 2 car  $\alpha$  et  $-\alpha$  définissent le même hyperplan. Le groupe  $\mathbb{W}$  agit librement sur le complément de ce diviseur dans  $\mathfrak{t}$  si bien que le morphisme  $\pi_{\mathfrak{t}} : \mathfrak{t} \rightarrow \mathbb{C}$  est étale sur cet ouvert et clairement ramifié le long de ce diviseur. Par ailleurs,  $\text{Out}(\mathbb{G})$  agit sur l'ensemble des racines si bien qu'il laisse stable ce diviseur.

Il reste à démontrer que  $\mathfrak{D}_{\mathbb{G}}$  est un diviseur réduit. Puisqu'il s'agit d'une intersection complète, il suffit de montrer qu'un ouvert dense de  $\mathfrak{D}_{\mathbb{G}}$  est réduit. On peut donc ôter de  $\mathfrak{t}$  les points appartenant à plus de deux hyperplans de racines. On se ramène alors à un groupe de rang semi-simple un où l'assertion peut être vérifiée à la main.  $\square$

Soient  $X$  un  $k$ -schéma et  $G$  une forme quasi-déployée de  $\mathbb{G}$  sur  $X$  donnée par un  $\text{Out}(\mathbb{G})$ -torseur  $\rho_G$ . En tordant  $\mathfrak{D}_{\mathbb{G}}$  par  $\rho_G$ , on obtient un diviseur réduit  $\mathfrak{D}_G$  de  $\mathfrak{c}$  dont l'ouvert complémentaire est  $\mathfrak{c}^{\text{rs}}$ . Soit  $(\kappa, \rho_{\kappa})$  une donnée endoscopique cf. 1.8.1 de  $G$ . On a un diviseur  $\mathfrak{D}_{\mathbb{H}}$  de  $\mathbb{C}_{\mathbb{H}}$  et par torsion un diviseur  $\mathfrak{D}_H$  de  $\mathfrak{c}_H$ .

**Lemme 1.10.2.** — *Il existe un unique diviseur effectif  $\mathfrak{R}_{\mathbb{H}}^{\mathbb{G}}$  de  $\mathbb{C}_{\mathbb{H}}$  tel que*

$$\nu^* \mathfrak{D}_{\mathbb{G}} = \mathfrak{D}_{\mathbb{H}} + 2\mathfrak{R}_{\mathbb{H}}^{\mathbb{G}}.$$

*Démonstration.* — Choisissons un sous-ensemble  $\Psi \subset \Phi - \Phi_{\mathbb{H}}$  tel que pour toute paire de racines opposées  $\pm\alpha \in \Phi - \Phi_{\mathbb{H}}$ , le cardinal de  $\{\pm\alpha\} \cap \Psi$  vaut un. Considérons l'idéal de  $k[\mathfrak{t}]$  engendré par la fonction  $\prod_{\alpha \in \Psi} d\alpha$ . Cet idéal est invariant sous l'action de  $\mathbb{W}_{\mathbb{H}}$  car la fonction  $\prod_{\alpha \in \Psi} d\alpha$  se transforme sous l'action de  $\mathbb{W}_{\mathbb{H}}$  par un signe. Le diviseur effectif  $\mathbb{W}_{\mathbb{H}}$ -invariant défini par cet idéal n'étant pas contenu dans  $\mathfrak{D}_{\mathbb{H}}$ , il existe d'un unique diviseur effectif  $\mathfrak{R}_{\mathbb{H}}^{\mathbb{G}}$  de  $\mathbb{C}_{\mathbb{H}}$  qui vérifie alors la relation dans l'énoncé du lemme.  $\square$

**1.10.3.** — En tordant  $\mathfrak{R}_{\mathbb{H}}^{\mathbb{G}}$  par  $\rho_{\kappa}$ , on obtient un diviseur effectif  $\mathfrak{R}_H^G$  sur  $\mathfrak{c}_H$  qui vérifie la relation

$$\nu^* \mathfrak{D}_G = \mathfrak{D}_H + 2\mathfrak{R}_H^G.$$

**1.11. Le lemme fondamental pour les algèbres de Lie.** — On est maintenant en position d'énoncer le lemme fondamental pour les algèbres de Lie, conjecturé par Langlands et Shelstad et Waldspurger.

Soient  $F_v$  un corps local non-archimédien,  $\mathcal{O}_v$  son anneau des entiers et  $v : F_v^{\times} \rightarrow \mathbb{Z}$  la valuation discrète. Soit  $\mathbb{F}_q$  le corps résiduel de  $\mathcal{O}_v$ . Soit

$X_v = \text{Spec}(\mathcal{O}_v)$ . Soit  $F_v^{\text{sep}}$  une clôture séparable de  $F_v$ . Celle-ci définit un point géométrique  $x$  de  $X_v$ .

Soit  $G$  une forme quasi-déployée de  $\mathbb{G}$  sur  $\mathcal{O}_v$  définie par un homomorphisme  $\rho_G^\bullet : \pi_1(X_v, x) \rightarrow \text{Out}(\mathbb{G})$ . Considérons une donnée endoscopique pointée  $(\kappa, \rho_\kappa^\bullet)$  formée d'un élément  $\kappa \in \hat{\mathbb{T}}$  et d'un homomorphisme  $\rho_\kappa^\bullet : \pi_1(X_v, x) \rightarrow \pi_0(\kappa)$  au-dessus de  $\rho_G^\bullet$  cf. 1.8.2. On a alors un schéma en groupes réductifs  $H$  au-dessus de  $X_v$  et un morphisme de  $X_v$ -schémas  $\mathfrak{c}_H \rightarrow \mathfrak{c}$ .

Soit  $a_H \in \mathfrak{c}_H(\mathcal{O}_v)$  d'image  $a \in \mathfrak{c}(\mathcal{O}_v) \cap \mathfrak{c}^{\text{rs}}(F_v)$ . Choisissons une mesure de Haar  $dt_v$  sur le tore  $J_a(F_v)$ . D'après le lemme 1.9.2, on a un isomorphisme entre les tores  $J_a$  et  $J_{H, a_H}$  de sorte qu'on peut transporter la mesure de Haar  $dt_v$  sur  $J_{H, a_H}(F_v)$ .

En choisissant un  $F_v^{\text{sep}}$ -point  $x_a$  comme dans 1.9.3, on peut définir la  $\kappa$ -intégrale orbitale  $\mathbf{O}_a^\kappa$  de n'importe quelle fonction localement constante à support compact dans  $\mathfrak{g}(F_v)$ . Notons  $1_{\mathfrak{g}_v}$  la fonction caractéristique de  $\mathfrak{g}(\mathcal{O}_v)$  dans  $\mathfrak{g}(F_v)$  et  $1_{\mathfrak{h}_v}$  la fonction caractéristique de  $\mathfrak{h}(\mathcal{O}_v)$  dans  $\mathfrak{h}(F_v)$ .

**Théorème 1.11.1.** — *Avec les notations ci-dessus, on a l'égalité*

$$\mathbf{O}_a^\kappa(1_{\mathfrak{g}_v}, dt_v) = q^{r_{H,v}^G(a_H)} \mathbf{SO}_{a_H}(1_{\mathfrak{h}_v}, dt_v)$$

où  $r_{H,v}^G(a_H) = \deg_v(a_H^* \mathfrak{R}_H^G)$ .

Ce théorème est la variante pour les algèbres de Lie de la conjecture originale de Langlands et Shelstad qui porte sur les groupes de Lie sur un corps local non-archimédien. Cette variante a été formulée par Waldspurger qui a démontré qu'elle implique la conjecture originale pour les groupes de Lie. Il a aussi démontré que le cas où  $F$  est un corps local de caractéristique positive ne divisant pas l'ordre de  $\mathbb{W}$  implique le cas où  $F$  est un corps local de caractéristique nulle et dont la caractéristique résiduelle ne divise pas l'ordre de  $\mathbb{W}$  cf. [78]. Nous nous limitons au premier cas.

L'énoncé original de Langlands-Shelstad est sensiblement plus compliqué notamment à cause de la présence d'un signe dans le facteur de transfert. Dans [44], Kottwitz a établi le lien entre le facteur de transfert de Langlands-Shelstad et la section de Kostant qui nous permet d'énoncer la conjecture de Langlands et Shelstad sous cette forme plus simple. Dans le cas des groupes classiques, Waldspurger a donné une forme plus explicite de cette conjecture dans [77]. Hales a également écrit un article d'exposition fort agréable [31] sur l'énoncé de la conjecture de Langlands-Shelstad.

**1.11.2.** — Notons que l'énoncé ci-dessus s'étend trivialement au cas où on part d'un élément  $a_H \in \mathfrak{c}^{G-\text{rs}}(F_v)$  qui n'est pas dans  $\mathfrak{c}_H(\mathcal{O}_v)$ . Dans ce cas, on a également  $a \notin \mathfrak{c}(\mathcal{O}_v)$ . Ceci se déduit en effet du critère valuatif de propreté appliqué au morphisme fini  $\nu_H : \mathfrak{c}_H \rightarrow \mathfrak{c}$ . Il est alors évident que les intégrales orbitales  $\mathbf{O}_a^\kappa(1_{\mathfrak{g}_v}, dt_v)$  et  $\mathbf{SO}_{a_H}(1_{\mathfrak{h}_v}, dt_v)$  sont nulles.

**1.11.3.** — Notons enfin que l'égalité de diviseurs

$$a_* \mathfrak{D}_G = a_H^* \mathfrak{D}_H + 2a_H^* \mathfrak{R}_G^H$$

qui se déduit de 1.10.3, implique

$$\Delta_H(a_H) \Delta_G(a)^{-1} = q^{\deg_v(a_H^* \mathfrak{R}_G^H)}$$

avec  $\Delta_H(a_H) = q^{-\deg(a_H^* \mathfrak{D}_H)/2}$  et  $\Delta_G(a) = q^{-\deg(a^* \mathfrak{D}_G)/2}$ . Ceci permet de récrire la formule 1.11.1 sous la forme plus habituelle

$$\Delta_G(a) \mathbf{O}_a^\kappa(1_{\mathfrak{g}_v}, dt_v) = \Delta_H(a_H) \mathbf{SO}_{a_H}(1_{\mathfrak{h}_v}, dt_v).$$

**1.12. Le lemme fondamental non standard.** — Dans [79], Waldspurger a formulé une variante de la conjecture de Langlands-Shelstad qu'il appelle le lemme fondamental non standard. Dans ce paragraphe, nous allons rappeler cette conjecture.

Soient  $\mathbb{G}_1$  et  $\mathbb{G}_2$  deux groupes réductifs déployés sur  $k$  avec épinglages. Pour tout  $i \in \{1, 2\}$ , on a en particulier un tore maximal  $\mathbb{T}_i$  de  $\mathbb{G}_i$ , l'ensemble des racines  $\Phi_i \subset \mathbb{X}^*(\mathbb{T}_i)$ , l'ensemble des racines simples  $\Delta_i \subset \Phi_i$  ainsi que l'ensemble des coracines  $\Phi_i^\vee \subset \mathbb{X}_*(\mathbb{T}_i)$ . Le quintuplet

$$(\mathbb{X}^*(\mathbb{T}_i), \mathbb{X}_*(\mathbb{T}_i), \Phi_i, \Phi_i^\vee, \Delta_i)$$

est la donnée radicielle associée au groupe épinglé  $\mathbb{G}_i$  et qui le détermine à isomorphisme unique près.

**Définition 1.12.1.** — Une isogéie des données radicielles entre  $\mathbb{G}_1$  et  $\mathbb{G}_2$  consiste en un couple d'isomorphismes de  $\mathbb{Q}$ -espaces vectoriels

$$\psi^* : \mathbb{X}^*(\mathbb{T}_2) \otimes \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{X}^*(\mathbb{T}_1) \otimes \mathbb{Q}$$

et

$$\psi_* : \mathbb{X}_*(\mathbb{T}_1) \otimes \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{X}_*(\mathbb{T}_2) \otimes \mathbb{Q}$$

l'un de l'autre tels que  $\psi^*$  envoie bijectivement l'ensemble des  $\mathbb{Q}$ -droites de la forme  $\mathbb{Q}\alpha_2$  avec  $\alpha_2 \in \Phi_2$  sur l'ensemble des  $\mathbb{Q}$ -droites de la forme  $\mathbb{Q}\alpha_1$  avec  $\alpha_1 \in \Phi_1$  en envoyant les droites des racines simples sur les droites des racines simples et de même pour  $\psi_*$  avec les  $\mathbb{Q}$ -droites engendrées par les coracines.



**Exemple 1.12.2.** — Deux groupes semi-simples ayant le même groupe adjoint ont des données radicielles isogènes. En effet dans ce cas, on a un isomorphisme canonique  $\mathbb{X}^*(T_1) \otimes \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{X}^*(T_2) \otimes \mathbb{Q}$  qui respecte l'ensemble des racines et celui des racines simples et dont l'isomorphisme dual respecte les coracines.

**Exemple 1.12.3.** — L'exemple le plus intéressant est celui de deux groupes réductifs duaux au sens de Langlands. Par définition, la donnée radicielle du groupe dual  $\hat{G}$  s'obtient à partir de celle de  $G$  en échangeant le groupe des caractères avec le groupe des cocaractères, l'ensemble des racines avec l'ensemble des coracines. Considérons la décomposition en somme directe de  $\mathbb{Q}$ -espaces vectoriels

$$\begin{aligned}\mathbb{X}^*(T) \otimes \mathbb{Q} &= \mathbb{Q}\Phi \oplus \mathbb{X}^*(Z_G) \otimes \mathbb{Q} \\ \mathbb{X}_*(T) \otimes \mathbb{Q} &= \mathbb{Q}\Phi^\vee \oplus \mathbb{X}_*(Z_G) \otimes \mathbb{Q}.\end{aligned}$$

où  $\mathbb{Q}\Phi$  est le sous-espace vectoriel de  $\mathbb{X}^*(T) \otimes \mathbb{Q}$  engendré par les racines et  $\mathbb{X}^*(Z_G)$  est le groupe des caractères du centre de  $G$ . L'application  $\alpha \mapsto \alpha^\vee$  induit un isomorphisme d'espaces vectoriels  $\mathbb{Q}\Phi \rightarrow \mathbb{Q}\Phi^\vee$  qui envoie les droites de la forme  $\mathbb{Q}\beta$  pour une certaine racine  $\beta$  sur les droites de la forme  $\mathbb{Q}\beta'^\vee$  pour une certaine coracine  $\beta'$ . L'application linéaire duale a la même propriété. Les cas intéressants sont les cas  $B_n \leftrightarrow C_n$ ,  $F_4$  et  $G_2$  où il existe des racines de longueur différente. On se réfère à [79, page 14] pour une discussion plus détaillée.

**1.12.4.** — Puisque la réflexion associée à une racine  $\alpha$  ne dépend que de la  $\mathbb{Q}$ -droite passant par  $\alpha$ , les isomorphismes  $\psi^*$  et  $\psi_*$  induisent un isomorphisme entre les groupes de Weyl  $W_1 \xrightarrow{\sim} W_2$  de deux groupes réductifs  $G_1$  et  $G_2$  appariés.

**1.12.5.** — Soient  $G_1$  et  $G_2$  deux groupes déployés dont les données radicielles sont isogènes. Soit  $\text{Out}_{12}$  le groupe des automorphismes de  $\mathbb{X}_*(T_1) \otimes \mathbb{Q}$  qui laissent stables  $\Phi_1, \Delta_1$  mais également  $\mathbb{X}^*(T_2), \Phi_2, \Delta_2$  vu comme sous-ensembles de  $\mathbb{X}_*(T_1) \otimes \mathbb{Q}$  et de même pour les automorphismes duaux de  $\mathbb{X}_*(T_1) \otimes \mathbb{Q}$ . Pour tout  $k$ -schéma  $X$ , pour tout  $\text{Out}_{12}$  torseur  $\rho_{12}$ , on peut tordre  $G_1$  et  $G_2$  munis de leurs épinglages par  $\rho_{12}$  pour obtenir des formes quasi-déployées  $G_1$  et  $G_2$ . Les couples des formes quasi-déployées obtenus par ce procédé sont appelés *appariés*.

Étant donné l'isomorphisme  $\psi^*$  entre les  $\mathbb{Q}$ -espaces vectoriels

$$\mathbb{X}^*(T_1) \otimes \mathbb{Q} \simeq \mathbb{X}^*(T_2) \otimes \mathbb{Q},$$

on peut comparer la position de deux réseaux  $\mathbb{X}^*(\mathbb{T}_1)$  et  $\mathbb{X}^*(\mathbb{T}_2)$  vus comme réseaux dans un même  $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel. Un nombre premier  $p$  est dit *bon* par rapport à  $\psi^*$  si  $p$  ne divise pas les entiers

$$|\mathbb{X}^*(\mathbb{T}_1)/(\mathbb{X}^*(\mathbb{T}_1) \cap \mathbb{X}^*(\mathbb{T}_2))| \text{ et } |\mathbb{X}^*(\mathbb{T}_2)/(\mathbb{X}^*(\mathbb{T}_2) \cap \mathbb{X}^*(\mathbb{T}_1))|.$$

Si  $k$  est un corps de caractéristique bonne par rapport à  $\psi^*$ , celui-ci induira un isomorphisme  $\mathbb{X}^*(\mathbb{T}_1) \otimes k \xrightarrow{\sim} \mathbb{X}^*(\mathbb{T}_2) \otimes k$ .

**Lemme 1.12.6.** — *Soient  $G_1$  et  $G_2$  deux groupes appariés au-dessus d'une base  $X$  de bonnes caractéristiques résiduelles. Soient  $T_1$  et  $T_2$  les tores maximaux des épinglages de  $G_1$  et  $G_2$  et  $\mathfrak{t}_1, \mathfrak{t}_2$  leurs algèbres de Lie. Alors il existe un isomorphisme canonique  $\mathfrak{t}_1 \rightarrow \mathfrak{t}_2$  et un isomorphisme compatible  $\nu : \mathfrak{c}_{G_1} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{c}_{G_2}$ .*

*Démonstration.* — On a

$$\mathfrak{t}_i = \text{Spec}(\text{Sym}_{\mathcal{O}_X}(\mathbb{X}^*(\mathbb{T}_i) \otimes \mathcal{O}_X))$$

où  $\text{Sym}_{\mathcal{O}_X}(\mathbb{X}^*(\mathbb{T}_i) \otimes \mathcal{O}_X)$  est la  $\mathcal{O}_X$ -algèbre symétrique associée au  $\mathcal{O}_X$ -module libre  $\mathbb{X}^*(\mathbb{T}_i) \otimes \mathcal{O}_X$ . Si les caractéristiques résiduelles de  $X$  sont bonnes,  $\psi^*$  induit un isomorphisme de  $\mathcal{O}_X$ -modules libres

$$\mathbb{X}^*(\mathbb{T}_2) \otimes \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathbb{X}^*(\mathbb{T}_1) \otimes \mathcal{O}_X$$

et donc un isomorphisme  $\mathfrak{t}_1 \xrightarrow{\sim} \mathfrak{t}_2$ . On a déjà vu que  $(\psi^*, \psi_*)$  induit un isomorphisme  $\mathbb{W}_1 \xrightarrow{\sim} \mathbb{W}_2$  qui est visiblement compatible avec leurs actions sur  $\mathfrak{t}_1 \xrightarrow{\sim} \mathfrak{t}_2$ . Il en résulte un isomorphisme entre

$$\mathfrak{c}_1 = \text{Spec}(\text{Sym}_{\mathcal{O}_X}(\mathbb{X}^*(\mathbb{T}_i) \otimes \mathcal{O}_X))^{\mathbb{W}_1}$$

et

$$\mathfrak{c}_2 = \text{Spec}(\text{Sym}_{\mathcal{O}_X}(\mathbb{X}^*(\mathbb{T}_i) \otimes \mathcal{O}_X))^{\mathbb{W}_2}.$$

En appliquant la torsion extérieure par  $\rho_{12}$ , on obtient l'isomorphisme  $\mathfrak{c}_1 = \mathfrak{c}_2$  qu'on voulait.  $\square$

Mettons-nous sous l'hypothèse du lemme précédent. Soit  $X$  le disque  $\text{Spec}(\mathcal{O}_v)$  où  $\mathcal{O}_v = k[[\epsilon_v]]$  avec  $k$  un corps fini de caractéristique bonne par rapport à  $\psi^*$ . Soient  $a_1 \in \mathfrak{c}_{G_1}(\mathcal{O}_v)$  et  $a_2 \in \mathfrak{c}_{G_2}(\mathcal{O}_v)$  tels que  $\nu(a_1) = a_2$ . L'isogénie  $\mathbb{T}_1 \rightarrow \mathbb{T}_2$  donnée par  $\psi^*$  induit par torsion une isogénie des tores  $J_{a_1} \rightarrow J_{a_2}$  d'après 1.4.3. De plus, l'isogénie induit un isomorphisme entre les algèbres de Lie de ces tores sous l'hypothèse que la caractéristique est bonne par rapport à  $\psi$ . On peut donc transporter des mesures de Haar de  $J_{a_1}(F_v)$  à  $J_{a_2}(F_v)$  et inversement. On va utiliser la même notation  $dt_v$  pour ces mesures de Haar compatibles.

**Théorème 1.12.7.** — *On a l'égalité suivante entre les intégrales orbitales stables*

$$\mathbf{SO}_{a_1}(1_{G_1}, dt_v) = \mathbf{SO}_{a_2}(1_{G_2}, dt_v)$$

où  $1_{G_i}$  est la fonction caractéristique du compact  $\mathfrak{g}_i(\mathcal{O}_v)$  dans  $\mathfrak{g}_i(F_v)$ .

Cet égalité a été conjecturée par Waldspurger qui l'appelle le lemme fondamental non standard. Dans [79], il a démontré que la conjonction du lemme fondamental ordinaire 1.11.1 et du lemme non standard ci-dessus implique le lemme fondamental tordu.

**1.13. Formule globale de stabilisation.** — Revenons à la conjecture de Langlands-Shelstad. Le lemme fondamental consiste en une identité d'intégrales orbitales locales. Il sera néanmoins nécessaire de le replacer dans son contexte global d'origine qui est la stabilisation de la formule des traces. Nous allons donc passer en revue la structure de la partie anisotrope sur un corps global de caractéristique positive. Cette revue nous servira de guide plus tard pour étudier la structure de la cohomologie de la fibration de Hitchin.

Soient  $k = \mathbb{F}_q$  et  $F$  le corps des fonctions rationnelles sur une courbe projective lisse géométriquement connexe  $X$  sur  $k$ . Pour tout point fermé  $v \in |X|$ , notons  $F_v$  la complétion de  $F$  selon la valuation définie par  $v$  et  $\mathcal{O}_v$  son anneau des entiers. Pour simplifier, nous allons supposer dans cette discussion que  $G$  est un groupe adjoint déployé.

Pour toute classe  $\xi \in H^1(F, G)$ , on note  $G^\xi$  la forme intérieure de  $G$  définie par l'image de  $\xi$  dans  $H^1(F, G^{\text{ad}})$ . On appellera la forme  $G^\xi$  ainsi définie une forme intérieure forte. Au lieu de considérer la formule des traces de  $G$ , on va considérer la somme des formules des traces sur les formes intérieures fortes qui sont localement triviales. La stabilisation de la somme devient plus simple et en plus, admet une interprétation géométrique directe. Le processus de stabilisation qu'on va présenter est du à Langlands et Kottwitz, voir [48] et [41]. Nous reprenons ici l'exposition de [56].

Considérons donc la somme

$$(1.13.1) \quad \sum_{\xi \in \ker^1(F, G)} \sum_{\gamma \in \mathfrak{g}^{\xi, \text{ani}}(F)/\sim} \mathbf{O}_\gamma(1_D)$$

où

–  $\ker^1(F, G)$  est l'ensemble des classes d'isomorphisme des  $G$ -torseurs sur  $F$  d'image triviale dans les  $H^1(F_v, G)$  pour tous  $v \in |X|$ .

- $\mathfrak{g}^\xi$  est la forme de  $\mathfrak{g}$  sur  $F$  définie par  $\xi$ .
- $\gamma$  parcourt l'ensemble des classes de conjugaison régulières semi-simples de  $\mathfrak{g}^\xi(F)$  dont le centralisateur dans  $\mathfrak{g}^\xi(F \otimes_k \bar{k})$  est un tore anisotrope.
- $\mathbf{O}_\gamma(1_D)$  est l'intégrale orbitale globale

$$\mathbf{O}_\gamma(1_D) = \int_{G^\xi(F) \backslash G(\mathbb{A})} 1_D(\text{ad}(g)^{-1}\gamma) dg$$

de la fonction

$$1_D = \bigotimes_{v \in |X|} 1_{D_v} : \mathfrak{g}(\mathbb{A}) \longrightarrow \mathbb{C}$$

$1_{D_v}$  étant la fonction caractéristique du compact ouvert  $\varepsilon^{-d_v} \mathfrak{g}(\mathcal{O}_v)$  de  $\mathfrak{g}(F_v)$ , les entiers  $d_v$  étant des entiers pairs, nuls sauf pour un nombre fini de places  $v$ . L'intégrale est convergente pour les classes anisotropes  $\gamma$ .

–  $dg$  est la mesure de Haar normalisée de  $G(\mathbb{A})$  de telle façon que  $G(\mathcal{O}_{\mathbb{A}})$  soit de volume un.

Considérons le morphisme caractéristique de Chevalley  $\chi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{c}$  ainsi que ses formes tordues

$$\chi^\xi : \mathfrak{g}^\xi \longrightarrow \mathfrak{c}$$

par les classes  $\xi \in H^1(F, G)$ . Notons que le groupe des automorphismes de  $G$  agit sur  $\mathfrak{c}$  à travers le groupe des automorphismes extérieurs de sorte que la torsion par les  $\xi$  n'affecte pas  $\mathfrak{c}$ . Toute classe de conjugaison  $\gamma$  de  $\mathfrak{g}^\xi(F)$  définit donc un élément  $a \in \mathfrak{c}(F)$ . Comme le centralisateur de  $\gamma$  semi-simple régulier ne dépend que de  $a$ , il existe un sous-ensemble  $\mathfrak{c}^{\text{ani}}(F)$  de  $\mathfrak{c}(F)$  des éléments  $a$  provenant des classes  $\gamma$  semi-simples régulières et anisotropes dans  $\mathfrak{g}^\xi(F \otimes_k \bar{k})$ . La somme (1.13.1) peut se réécrire comme une somme sur les  $a \in \mathfrak{c}^{\text{ani}}(F)$  :

$$(1.13.2) \quad \sum_{a \in \mathfrak{c}^{\text{ani}}(F)} \sum_{\xi \in \ker^1(F, G)} \sum_{\gamma \in \mathfrak{g}^\xi(F) / \sim, \chi(\gamma) = a} \mathbf{O}_\gamma(1_D).$$

Pour chaque élément  $a \in \mathfrak{c}^{\text{ani}}(F)$ , la section de Kostant 1.2.1 produit un élément  $\gamma_0 = \epsilon(a) \in \mathfrak{g}(F)$  d'image  $\chi(\gamma_0) = a$ . On a noté  $J_a$  le centralisateur  $I_{\gamma_0}$  de  $\gamma_0$ . Puisqu'on s'est restreint à la partie semi-simple régulière anisotrope,  $J_a$  est un tore anisotrope. Le tore dual  $\hat{J}_a$  défini sur  $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$  est muni d'une action finie de  $\Gamma = \text{Gal}(\overline{F}/F)$  telle que le groupe  $\hat{J}_a^\Gamma$  des points fixes est un groupe fini.

Pour tout  $\xi \in \ker^1(F, G)$ , les classes de conjugaison  $\gamma \in \mathfrak{g}^\xi(F)$  telles que  $\chi(\gamma) = a$  sont en bijection avec les classes de cohomologie

$$\alpha = \text{inv}(\gamma_0, \gamma) \in H^1(F, J_a)$$

dont l'image dans  $H^1(F, G)$  est l'élément  $\xi$ . Ainsi l'ensemble des paires  $(\xi, \gamma)$  de la somme (1.13.2) où  $\xi \in \ker^1(F, G)$  et  $\gamma$  est une classe de conjugaison de  $\mathfrak{g}^\xi(F)$  d'image  $a \in \mathfrak{c}^{\text{ani}}(F)$  est en bijection avec

$$\ker[H^1(F, J_a) \rightarrow \bigoplus_{v \in |X|} H^1(F_v, G)].$$

Pour qu'une collection de classes de conjugaison  $(\gamma_v)_{v \in |X|}$  de  $\mathfrak{g}(F_v)$  avec  $\chi(\gamma_v) = a$  provienne d'une paire  $(\xi, \gamma)$  de la somme (1.13.2), il faut et il suffit que  $\gamma_v = \gamma_0$  pour presque tout  $v$  et que

$$(1.13.3) \quad \sum_{v \in |X|} \alpha_v|_{\hat{I}_a^\Gamma} = 0$$

où  $\alpha_v = \text{inv}_v(\gamma_0, \gamma_v)$  d'après [38]. Si c'est le cas, le nombre de paires  $(\xi, \gamma)$  qui s'envoient sur cette collection  $(\gamma_v)_{v \in |X|}$  est égal au cardinal du groupe

$$\ker^1(F, J_a) = \ker[H^1(F, J_a) \rightarrow \bigoplus_{v \in |X|} H^1(F_v, J_a)].$$

On va maintenant faire entrer en jeu les intégrales orbitales locales. Pour définir celles-ci, on a besoin d'une mesure de Haar du centralisateur. Pour tout  $a$ , on va choisir une forme volume invariante de la fibre générique de  $J_a$ . Une telle forme existe et unique à un scalaire près. Elle induit en chaque place  $v$  une mesure  $dt_v$  de  $J_a(F_v)$  dont le produit tensoriel  $\bigotimes_{v \in |X|} dt_v$  ne dépend plus du choix de la forme volume. C'est la mesure de Tamagawa.

La somme (1.13.2) se réécrit comme suit

$$(1.13.4) \quad \sum_{a \in \mathfrak{c}^{\text{ani}}(F)} |\ker^1(F, J_a)| \tau(J_a) \sum_{(\gamma_v)_{v \in |X|}} \prod_v \mathbf{O}_{\gamma_v}(1_{D_v}, dt_v)$$

où les  $\gamma_v$  sont des classes de conjugaison de  $\mathfrak{g}(F_v)$  vérifiant l'équation (1.13.3) et où

$$\tau(J_a) = \text{vol}(J_a(F) \backslash J_a(\mathbb{A}), \bigotimes_{v \in |X|} dt_v)$$

est un nombre de Tamagawa. En mettant en facteur le nombre de Tamagawa  $\tau(J_a)$ , on trouve une somme de produits d'intégrales orbitales locales  $\prod_v \mathbf{O}_{\gamma_v}(1_{D_v}, dt_v)$  au lieu des intégrales orbitales globales  $\mathbf{O}_\gamma(1_D)$ .

En appliquant la formule d'Ono [59]

$$|\ker^1(F, J_a)| \tau(J_a) = \left| \pi_0(\hat{J}_a^\Gamma) \right|,$$

la somme (1.13.2) devient

$$(1.13.5) \quad \sum_{a \in \mathfrak{c}^{\text{ani}}(F)} \left| \pi_0(\hat{J}_a^\Gamma) \right| \sum_{(\gamma_v)_{v \in |X|}} \prod_v \mathbf{O}_{\gamma_v}(1_{D_v}, dt_v)$$

où les  $(\gamma_v)$  vérifient la condition (1.13.3). Notons qu'avec l'hypothèse  $J_a$  anisotrope, le groupe  $\hat{J}_a^\Gamma$  est un groupe fini de sorte que  $\pi_0(\hat{J}_a^\Gamma) = \hat{J}_a^\Gamma$ .

En utilisant la transformation de Fourier sur le groupe fini  $\hat{J}_a^\Gamma$ , la somme (1.13.2) devient

$$(1.13.6) \quad \sum_{a \in \mathfrak{c}^{\text{ani}}(F)} \sum_{\kappa \in \hat{J}_a^\Gamma} \mathbf{O}_a^\kappa(1_D, \bigotimes_{v \in |X|} dt_v)$$

avec

$$(1.13.7) \quad \mathbf{O}_a^\kappa(1_D, \bigotimes_{v \in |X|} dt_v) = \prod_{v \in |X|} \sum_{\substack{\gamma_v \in \mathfrak{g}(F_v)/\sim \\ \chi(\gamma_v) = a}} \langle \text{inv}_v(\gamma_0, \gamma_v), \kappa \rangle \mathbf{O}_{\gamma_v}(1_{D_v}, dt_v).$$

L'opération suivante consiste à permuter la sommation sur les  $a$  et la sommation sur les  $\kappa$ . En choisissant un plongement de  $\hat{J}_a$  dans  $\hat{G}$ ,  $\kappa$  définit une classe de conjugaison semi-simple  $[\kappa]$ . L'intersection  $\hat{J}_a^\Gamma \cap [\kappa]$  de  $\hat{J}_a^\Gamma$  avec la classe de conjugaison  $[\kappa]$  ne dépend pas du choix de plongement de  $\hat{J}_a$  dans  $\hat{G}$ . La somme (1.13.2) devient maintenant

$$(1.13.8) \quad \sum_{[\kappa] \in \hat{G}/\sim} \sum_{a \in \mathfrak{c}^{\text{ani}}(F)} \sum_{\kappa \in \hat{J}_a^\Gamma \cap [\kappa]} \mathbf{O}_a^\kappa(1_D, \bigotimes_{v \in |X|} dt_v).$$

Rappelons qu'on a supposé que  $G$  est un groupe semi-simple adjoint. Pour chaque classe de conjugaison  $[\kappa]$  on choisit un représentant  $\kappa \in \hat{G}$ . Comme  $\hat{G}$  est un groupe semi-simple simplement connexe,  $\hat{G}_\kappa$  est un groupe réductif connexe. Soit  $\hat{H} = \hat{G}_\kappa$  et  $H$  le groupe réductif dual de  $\hat{H}$ . Comme on ne s'intéresse qu'à la partie anisotrope on écarte tous les  $H$  qui ne sont pas semi-simples. Supposons donc  $H$  semi-simple et regardons le morphisme

$$\nu_H : \mathfrak{c}_H^{\text{ani}}(F) \longrightarrow \mathfrak{c}^{\text{ani}}(F).$$

Un élément  $a$  est dans l'image de  $\nu_H$  si et seulement si  $\hat{J}_a^\Gamma \cap [\kappa]$  est non-vide. En général, on a une bijection canonique entre l'ensemble  $\hat{J}_a^\Gamma \cap [\kappa]$  et l'ensemble des  $a_H \in \mathfrak{c}_H^{\text{ani}}(F)$  dans la préimage de  $a$ .

En supposant le lemme fondamental, la somme (1.13.2) devient

$$(1.13.9) \quad \sum_H \sum_{a_H \in c_H^{\text{ani}}(F)} \text{SO}_a(1_D, \bigotimes_{v \in |X|} dt_v).$$

où la première somme porte sur l'ensemble des classes d'équivalence des groupes endoscopiques elliptiques de  $G$ .

Comme nous avons remarqué dans [55, 1], le comptage des points à valeurs dans un corps fini de l'espace de module des fibrés de Higgs donne essentiellement l'expression (1.13.2). On y a d'ailleurs proposé une interprétation géométrique du processus de stabilisation (1.13.2)=(1.13.6) comme une décomposition de la cohomologie de la fibration de Hitchin par rapport à l'action de ses symétries naturelles. Il s'agit donc d'une décomposition en somme directe d'un complexe pur sur la base de la fibration de Hitchin.

L'égalité (1.13.2)=(1.13.9) peut alors être interprété comme une égalité dans un groupe de Grothendieck entre deux complexes purs. Le théorème 6.4.3 est une variante précise de cette interprétation dont on en déduira le lemme fondamental de Langlands-Shelstad 1.11.1.

## 2. Centralisateur régulier et section de Kostant

Nous rappelons dans ce chapitre la construction du centralisateur régulier et du morphisme du centralisateur régulier vers le centralisateur de [55]. Nous rappelons aussi la description galoisienne du centralisateur régulier de Donagi et Gaitsgory [19].

On garde les notations de 1.3. En particulier,  $\mathbb{G}$  est un groupe réductif déployé sur un corps  $k$  et  $G$  est une forme quasi-déployée de  $\mathbb{G}$  sur un  $k$ -schéma  $X$ . On suppose que la caractéristique de  $k$  ne divise pas l'ordre de  $\mathbb{W}$ .

**2.1. Centralisateur régulier.** — Soit  $I$  le schéma en groupes des centralisateurs au-dessus de  $\mathfrak{g}$ . La fibre de  $I$  au-dessus d'un point  $x$  de  $\mathfrak{g}$  est le sous-groupe de  $G$  qui centralise  $x$

$$I_x = \{g \in G \mid \text{ad}(g)x = x\}.$$

La dimension de  $I_x$  dépend en général de  $x$  de sorte que  $I$  n'est pas plat sur  $\mathfrak{g}$  mais la restriction  $I^{\text{reg}}$  de  $I$  à l'ouvert  $\mathfrak{g}^{\text{reg}}$  est un schéma en groupes lisse de dimension relative  $r$ . Puisque sa fibre générique est un tore, c'est un schéma en groupes commutatif lisse.

Le lemme [55, 3.2] suivant est le point de départ de notre étude de la fibration de Hitchin. Pour la commodité du lecteur, nous allons rappeler brièvement sa démonstration.

**Lemme 2.1.1.** — *Il existe un unique schéma en groupes lisse commutatif  $J$  sur  $\mathfrak{c}$  muni d'un isomorphisme  $G$ -équivariant*

$$(\chi^* J)|_{\mathfrak{g}^{\text{reg}}} \xrightarrow{\sim} I|_{\mathfrak{g}^{\text{reg}}}.$$

*De plus, cet isomorphisme se prolonge en un homomorphisme  $\chi^* J \rightarrow I$ .*

*Démonstration.* — Soient  $x_1, x_2$  deux points de  $\mathfrak{g}^{\text{reg}}(\bar{k})$  tels que  $\chi(x_1) = \chi(x_2) = a$ . Soient  $I_{x_1}$  et  $I_{x_2}$  les fibres de  $I$  en  $x_1$  et  $x_2$ . Il existe  $g \in G(\bar{k})$  tel que  $\text{ad}(g)x_1 = x_2$ . La conjugaison par  $g$  induit un isomorphisme  $I_{x_1} \rightarrow I_{x_2}$  qui de surcroît ne dépend pas du choix de  $g$  puisque  $I_{x_1}$  est commutatif. Ceci permet de définir la fibre  $J_a$  de  $J$  en  $a$ .

La définition de  $J$  comme un schéma en groupes affine au-dessus de  $\mathfrak{c}$  se procède par descente fidèlement plate. Notons  $I_1^{\text{reg}}$  et  $I_2^{\text{reg}}$  les schémas en groupes sur  $\mathfrak{g}^{\text{reg}} \times_{\mathfrak{c}} \mathfrak{g}^{\text{reg}}$  images réciproques de  $I^{\text{reg}} = I|_{\mathfrak{g}^{\text{reg}}}$  par la première et la deuxième projection. La donnée de descente de  $I^{\text{reg}}$  le long du morphisme  $\chi^{\text{reg}} : \mathfrak{g}^{\text{reg}} \rightarrow \mathfrak{c}$  consiste en un isomorphisme  $\sigma_{12} : I_2^{\text{reg}} \rightarrow I_1^{\text{reg}}$  qui vérifie une condition de cocycle. Nous allons construire  $\sigma_{12}$  en laissant le soin de vérifier la condition de cocycle au lecteur.

La construction de l'isomorphisme  $\sigma_{12}$  se fait aussi par descente. Considérons le morphisme

$$G \times \mathfrak{g}^{\text{reg}} \rightarrow \mathfrak{g}^{\text{reg}} \times_{\mathfrak{c}} \mathfrak{g}^{\text{reg}}$$

défini par  $(g, x) \rightarrow (x, \text{ad}(g)x)$ . C'est un morphisme lisse surjectif donc a fortiori fidèlement plat. Au-dessus de  $G \times \mathfrak{g}^{\text{reg}}$ , on a un isomorphisme canonique entre  $I_1^{\text{reg}}$  et  $I_2^{\text{reg}}$  qui consiste en la structure  $G$ -équivariante de  $I$ . Pour que cet isomorphisme descende à  $\mathfrak{g}^{\text{reg}} \times_{\mathfrak{c}} \mathfrak{g}^{\text{reg}}$ , il faut vérifier une identité au-dessus du carré de  $G \times \mathfrak{g}^{\text{reg}}$  au-dessus de  $\mathfrak{g}^{\text{reg}} \times_{\mathfrak{c}} \mathfrak{g}^{\text{reg}}$ . Après avoir identifié ce carré à  $G \times I_1^{\text{reg}}$ , l'identité à vérifier se déduit de la commutativité du  $\mathfrak{g}^{\text{reg}}$ -schéma en groupes  $I_1^{\text{reg}}$ .

On a donc construit un schéma en groupes lisse commutatif  $J$  au-dessus de  $\mathfrak{c}$  muni d'un isomorphisme  $G$ -équivariant  $\chi^* J|_{\mathfrak{g}^{\text{reg}}} \rightarrow I|_{\mathfrak{g}^{\text{reg}}}$ . Cet isomorphisme s'étend en un homomorphisme de schéma en groupes  $\chi^* J \rightarrow I$  puisque  $\chi^* J$  est un  $k$ -schéma lisse,  $I$  est un  $k$ -schéma affine et de plus  $\chi^* J - \chi^* J|_{\mathfrak{g}^{\text{reg}}}$  est un fermé de codimension trois de  $\chi^* J$ .  $\square$

Nous appelons  $J$  le *centralisateur régulier*. On peut en fait prendre comme définition  $J := \epsilon^* I$  où  $\epsilon$  est la section de Kostant de 1.2. Notons



que  $J$  est muni d'une structure  $\mathbb{G}_m$ -équivariante pour l'action de  $\mathbb{G}_m$  sur  $\mathfrak{c}$  définie par les exposants. Par descente, on a un schéma en groupes sur  $[\mathfrak{c}/\mathbb{G}_m]$  qu'on notera également  $J$ , voir [55, 3.3].

**2.2. Sur le quotient  $[\mathfrak{g}/G]$ .** — Le morphisme de Chevalley  $\chi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{c}$  étant  $G$ -invariant, il se factorise par le champ quotient  $[\mathfrak{g}/G]$  et le morphisme

$$[\chi] : [\mathfrak{g}/G] \rightarrow \mathfrak{c}.$$

Rappelons que  $[\mathfrak{g}/G]$  associe à tout  $k$ -schéma  $S$  le groupoïde des couples  $(E, \phi)$  où  $E$  est un  $G$ -torseur sur  $S$  et où  $\phi$  est une section du fibré adjoint  $\mathrm{ad}(E)$  associée à la représentation adjointe de  $G$ .

Au-dessus de  $\mathfrak{c}$ , on a défini un schéma en groupes commutatif lisse  $J$ . Soit  $\mathbf{B}J$  le classifiant de  $J$  qui associe à tout  $\mathfrak{c}$ -schéma  $S$  le groupoïde de Picard des  $J$ -torseurs sur  $S$ . Le lemme 2.1.1 montre qu'on a une action de  $\mathbf{B}J$  sur  $[\mathfrak{g}/G]$  au-dessus de  $\mathfrak{c}$ . En effet, on peut tordre un couple  $(E, \phi) \in [\mathfrak{g}/G](S)$  par un  $J$ -torseur à l'aide de l'homomorphisme  $\chi^*J \rightarrow I$  de 2.1.1.

**Proposition 2.2.1.** — *Le morphisme  $[\chi^{\mathrm{reg}}] : [\mathfrak{g}^{\mathrm{reg}}/G] \rightarrow \mathfrak{c}$  est une gerbe liée par le centralisateur régulier  $J$ . De plus, cette gerbe est neutre.*

*Démonstration.* — L'assertion que  $[\chi^{\mathrm{reg}}]$  est une gerbe se déduit du fait que la restriction de l'homomorphisme  $\chi^*J \rightarrow I$  à  $\mathfrak{g}^{\mathrm{reg}}$  est un isomorphisme  $G$ -équivariant par construction de  $J$ . La section de Kostant  $\epsilon : \mathfrak{c} \rightarrow \mathfrak{g}^{\mathrm{reg}}$  composée avec le morphisme quotient  $\mathfrak{g}^{\mathrm{reg}} \rightarrow [\mathfrak{g}^{\mathrm{reg}}/G]$  neutralise la gerbe. Nous noterons ce point  $[\epsilon] : \mathfrak{c} \rightarrow [\mathfrak{g}^{\mathrm{reg}}/G]$ .  $\square$

**2.2.2.** — Il n'est donc pas déraisonnable de penser  $[\mathfrak{g}/G]$  comme une sorte de compactification du champ de Picard  $\mathbf{B}J$ . C'est une moule avec laquelle on fabrique des situations géométriques plus concrètes comme la fibre de Springer affine et la fibration de Hitchin en évaluant sur de différents schémas  $S$ . Pour les fibres de Springer affines, on l'évalue sur l'anneau des séries formelles à une variable *cf.* 3. Pour la fibration de Hitchin, on l'évalue sur une courbe projective lisse *cf.* 4. Pour cette dernière, on a besoin de tenir compte aussi de l'action de  $\mathbb{G}_m$  qui agit par homothétie sur  $\mathfrak{g}$ .

**2.2.3.** — Le centralisateur régulier  $J$  est muni d'une action de  $\mathbb{G}_m$  qui relève l'action de  $\mathbb{G}_m$  sur  $\mathfrak{c}$ . Le classifiant  $\mathbf{B}J$  au-dessus de  $[\mathfrak{c}/\mathbb{G}_m]$  agit

sur  $[\mathfrak{g}/G \times \mathbb{G}_m]$ . Ce dernier contient comme ouvert  $[\mathfrak{g}^{\text{reg}}/G \times \mathbb{G}_m]$ . Le morphisme

$$(2.2.4) \quad [\chi^{\text{reg}}/\mathbb{G}_m] : [\mathfrak{g}^{\text{reg}}/G \times \mathbb{G}_m] \rightarrow [\mathfrak{c}/\mathbb{G}_m]$$

est encore une gerbe liée par  $J$ . Cette gerbe n'est pas neutre en général. Elle le devient néanmoins après l'extraction d'une racine carré du fibré inversible universel sur  $\mathbf{B}\mathbb{G}_m$ . Considérons l'homomorphisme  $[2] : \mathbb{G}_m \rightarrow \mathbb{G}_m$  défini par  $t \mapsto t^2$ . Il induit un morphisme  $\mathbf{B}[2] : \mathbf{B}\mathbb{G}_m \rightarrow \mathbf{B}\mathbb{G}_m$  qui consiste en l'extraction d'une racine carré du fibré inversible universel sur  $\mathbf{B}\mathbb{G}_m$ . Nous indiquons par un exposant  $[2]$  le changement de base par ce morphisme. En particulier, on a un morphisme

$$[\chi/\mathbb{G}_m]^{[2]} : [\mathfrak{g}/G \times \mathbb{G}_m]^{[2]} \rightarrow [\mathfrak{c}/\mathbb{G}_m]^{[2]}.$$

En effet,  $[\mathfrak{c}/\mathbb{G}_m]^{[2]}$  est le quotient de  $\mathfrak{c}$  par l'action de  $\mathbb{G}_m$  définie comme le carré de l'action par les exposants et  $[\mathfrak{g}/G \times \mathbb{G}_m]^{[2]}$  est le quotient de  $\mathfrak{g}$  par l'action adjointe de  $G$  et le carré de l'homothétie. Considérons le composé de deux homomorphismes

$$\mathbb{G}_m \rightarrow T \times \mathbb{G}_m \rightarrow G \times \mathbb{G}_m$$

dont le premier est défini par  $t \mapsto (2\rho(t), t)$  où  $2\rho$  est la somme des coracines positives. La section de Kostant 1.2  $\epsilon : \mathfrak{c} \rightarrow \mathfrak{g}$  est équivariante par rapport à cet homomorphisme de sorte qu'il induit une section de  $[\chi/\mathbb{G}_m]^{[2]}$ . Nous pouvons reformuler ce qui précède d'une façon plus commode à l'usage.

**Lemme 2.2.5.** — *Soient  $S$  un  $k$ -schéma muni d'un fibré inversible  $D$  et  $h_D : S \rightarrow \mathbf{B}\mathbb{G}_m$  le morphisme associé vers le classifiant de  $\mathbb{G}_m$ . Soit  $a : S \rightarrow [\mathfrak{c}/\mathbb{G}_m]$  un morphisme au-dessus de  $h_D$ . La section de Kostant et le choix d'une racine carré  $D'$  de  $D$  définit une section*

$$[\epsilon]^{D'}(a) : S \rightarrow [\mathfrak{g}^{\text{reg}}/G \times \mathbb{G}_m].$$

**2.3. Le centre de  $G$  et les composantes connexes de  $J$ .** — Le contenu de ce paragraphe est bien connu.

**Proposition 2.3.1.** — *Si  $G$  est un groupe de centre connexe, le centralisateur régulier  $J$  a des fibres connexes.*

*Démonstration.* — Dans le cas d'un élément nilpotent régulier, il s'agit d'un théorème de Springer cf. [72, III, 3.7 et 1.14] et [70, théorème 4.11]. Le cas général s'y ramène par la décomposition de Jordan. Soit  $x \in \mathfrak{g}(\bar{k})$  un point géométrique de  $\mathfrak{g}$  qui est régulier. Soit  $x = s + n$

sa décomposition de Jordan où  $s \in \mathfrak{g}(\bar{k})$  est un élément semi-simple et  $n \in \mathfrak{g}(\bar{k})$  est un élément nilpotent tel que  $[x, n] = 0$ . D'après [35, 3, lemmes 5 et 8], le centralisateur  $G_x$  de  $x$  est un sous-groupe réductif connexe de  $G$  et de plus son centre est connexe. On applique donc le théorème de Springer à l'élément nilpotent régulier  $n$  de  $\text{Lie}(G_s)$ .  $\square$

**Corollaire 2.3.2.** — *Pour tout  $x \in \mathfrak{g}^{\text{reg}}(\bar{k})$ , l'homomorphisme canonique  $Z_G \rightarrow I_x$  induit un homomorphisme surjectif  $\pi_0(Z_G) \rightarrow \pi_0(I_x)$ .*

*Démonstration.* — Soient  $G^{\text{ad}}$  le groupe adjoint de  $G$  et  $I_x^{\text{ad}}$  le centralisateur de  $x$  dans  $G^{\text{ad}}$ . On a la suite exacte

$$1 \rightarrow Z_G \rightarrow I_x \rightarrow I_x^{\text{ad}} \rightarrow 1.$$

Puisque  $I_x^{\text{ad}}$  est un groupe connexe par la proposition qui précède, la flèche canonique  $\pi_0(Z_G) \rightarrow \pi_0(I_x)$  est surjective.  $\square$

**2.4. Description galoisienne de  $J$ .** — A la suite de Donagi et Gaitsgory [19], on peut décrire le schéma en groupes  $J$  au-dessus de  $\mathfrak{c}$  à l'aide du revêtement fini et plat  $\pi : \mathfrak{t} \rightarrow \mathfrak{c}$ . Notre présentation sera un peu différente de la leur.

Considérons la restriction à la Weil du tore  $T \times \mathfrak{t}$  sur  $\mathfrak{t}$

$$\Pi := \prod_{\mathfrak{t}/\mathfrak{c}} (T \times \mathfrak{t}) = \pi_*(T \times \mathfrak{t}).$$

Comme groupe abélien fibré au-dessus de  $\mathfrak{c}$ , on a

$$\Pi(S) = \text{Hom}_{\mathfrak{t}}(S \times_{\mathfrak{c}} \mathfrak{t}, T \times \mathfrak{t})$$

pour tout  $\mathfrak{c}$ -schéma  $S$ . Ce foncteur est représentable par un schéma en groupes commutatif au-dessus de  $\mathfrak{c}$  puisque le morphisme  $\mathfrak{t} \rightarrow \mathfrak{c}$  est fini et plat. Comme la restriction à la Weil préserve la lissité,  $\Pi$  est un schéma en groupes lisse et commutatif au-dessus de  $\mathfrak{c}$  de dimension relative  $r \sharp W$ . Au-dessus de l'ouvert  $\mathfrak{c}^{\text{rs}}$ , le revêtement  $\mathfrak{t}^{\text{rs}} \rightarrow \mathfrak{c}^{\text{rs}}$  est fini étale de sorte que la restriction de  $\Pi$  à cet ouvert est un tore.

Le  $S$ -schéma en groupes fini étale  $W$  agit simultanément sur  $T$  et  $\mathfrak{t}$ . L'action diagonale de  $W$  sur  $T \times \mathfrak{t}$  induit une action de  $W$  sur  $\Pi$ . Les points fixes par  $W$  définit un sous-foncteur fermé  $J^1$  de  $\Pi$ .

**Lemme 2.4.1.** — *Le sous-schéma fermé  $J^1$  de  $\Pi$  est un schéma en groupes commutatif et lisse au-dessus de  $\mathfrak{c}$ .*

*Démonstration.* — Puisque l'ordre de  $W$  est premier à la caractéristique, les points fixes de  $W$  dans le schéma lisse  $\Pi$  forme un sous-schéma fermé  $J^1$  lisse sur  $k$ . Soient  $x$  un point géométrique de  $\Pi$  fixe sous l'action de  $W$  et  $a$  son image dans  $\mathfrak{c}$ . Soient  $\mathbf{T}_x$  l'espace tangent de  $\Pi$  en  $x$  et  $\mathbf{T}_a$  l'espace tangent de  $\mathfrak{c}$  en  $a$ . Puisque  $\Pi$  est lisse au-dessus de  $\mathfrak{c}$ , l'application  $\mathbf{T}_x \rightarrow \mathbf{T}_a$  est surjective. L'espace tangent  $\mathbf{T}_x J^1$  de  $J^1$  en  $x$  est le sous-espace vectoriel de  $\mathbf{T}_x$  des vecteurs fixes sous  $W$ . Puisque la caractéristique  $p$  du corps de base  $k$  ne divise pas  $\sharp W$ , la restriction de  $\mathbf{T}_x \rightarrow \mathbf{T}_a$  à la partie  $W$ -fixe est encore surjective. Il s'ensuit que  $J^1$  est un schéma lisse au-dessus de  $\mathfrak{c}$ .  $\square$

La proposition qui suit est un renforcement de 1.4.2.

**Proposition 2.4.2.** — *Il existe un homomorphisme canonique  $J \rightarrow J^1$  qui de plus est un isomorphisme au-dessus de l'ouvert  $\mathfrak{c}^{\text{rs}}$  de  $\mathfrak{c}$ .*

*Démonstration.* — Commençons par construire un homomorphisme de  $J$  dans la restriction à la Weil  $\pi_*(T \times \mathfrak{t})$ . Par adjonction, il revient au même de construire un homomorphisme

$$\pi^* J \rightarrow T \times \mathfrak{t}$$

de schémas en groupes au-dessus de  $\mathfrak{t}$ .

Pour ce faire, nous avons besoin de la résolution simultanée de Grothendieck-Springer. Soit  $\tilde{\mathfrak{g}}$  le schéma des couples  $(x, gB)$  où  $x \in \mathfrak{g}$  et  $gB \in G/B$  qui vérifie  $\text{ad}(g)^{-1}(x) \in \text{Lie}(B)$ . Ici,  $B$  désigne le sous-groupe de Borel de l'épinglage de  $G$ . Notons  $\pi_{\mathfrak{g}} : \tilde{\mathfrak{g}} \rightarrow \mathfrak{g}$  la projection sur la variable  $x$ . La projection  $\text{Lie}(B) \rightarrow \mathfrak{t}$  définit un morphisme  $\tilde{\chi} : \tilde{\mathfrak{g}} \rightarrow \mathfrak{t}$  qui complète le carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\mathfrak{g}} & \xrightarrow{\tilde{\chi}} & \mathfrak{t} \\ \pi_{\mathfrak{g}} \downarrow & & \downarrow \pi \\ \mathfrak{g} & \xrightarrow{\chi} & \mathfrak{c} \end{array}$$

De plus, si on se restreint à l'ouvert  $\mathfrak{g}^{\text{reg}}$  de  $\mathfrak{g}$ , on obtient un diagramme cartésien

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\mathfrak{g}}^{\text{reg}} & \xrightarrow{\tilde{\chi}^{\text{reg}}} & \mathfrak{t} \\ \pi_{\mathfrak{g}}^{\text{reg}} \downarrow & & \downarrow \pi \\ \mathfrak{g}^{\text{reg}} & \xrightarrow{\chi^{\text{reg}}} & \mathfrak{c} \end{array}$$

D'après 2.1.1,  $(\chi^{\text{reg}})^* J = I|_{\mathfrak{g}^{\text{reg}}}$  si bien que pour construire un homomorphisme de  $\mathfrak{t}$ -schémas en groupes  $\pi^* J \rightarrow (T \times \mathfrak{t})$ , il suffit de construire un homomorphisme de  $\tilde{\mathfrak{g}}^{\text{reg}}$ -schémas en groupes

$$(\pi_{\mathfrak{g}}^{\text{reg}})^*(I|_{\mathfrak{g}^{\text{reg}}}) \rightarrow T \times \tilde{\mathfrak{g}}^{\text{reg}}$$

qui soit  $G$ -équivariant. Nous avons besoin d'un lemme.

**Lemme 2.4.3.** — *Pour tout  $(x, gB) \in \tilde{\mathfrak{g}}^{\text{reg}}(\bar{k})$ , on a  $I_x \subset \text{ad}(g)B$ .*

*Démonstration.* — L'assertion est claire pour les éléments  $x$  qui sont réguliers semi-simples. En effet, pour ceux-ci, le centralisateur  $I_x$  est un tore qui agit la fibre  $\pi_{\mathfrak{g}}^{-1}(x)$ . Puisque celle-ci est un ensemble discret, l'action du tore est nécessairement triviale.

Considérons le schéma en groupes  $H$  au-dessus de  $\tilde{\mathfrak{g}}^{\text{reg}}$  dont la fibre au-dessus de  $(x, gB) \in \tilde{\mathfrak{g}}^{\text{reg}}$  est le sous-groupe de  $I_x$  des éléments  $h$  tels que  $h \in gBg^{-1}$ . Par construction, c'est un sous-schéma en groupes fermés de  $(\pi_{\mathfrak{g}}^{\text{reg}})^* I$  qui coïncide avec  $(\pi_{\mathfrak{g}}^{\text{reg}})^* I|_{\mathfrak{g}^{\text{reg}}}$  au-dessus de l'ouvert dense des couples  $(x, gB)$  avec  $x$  réguliers semi-simples. Or  $(\pi_{\mathfrak{g}}^{\text{reg}})^* I|_{\mathfrak{g}^{\text{reg}}}$  est plat sur  $\tilde{\mathfrak{g}}^{\text{reg}}$ , ce sous-schéma en groupes est nécessairement égal à  $(\pi_{\mathfrak{g}}^{\text{reg}})^* I|_{\mathfrak{g}^{\text{reg}}}$ .  $\square$

Considérons le schéma en groupes  $\underline{B}$  au-dessus de  $G/B$  dont la fibre au-dessus de  $gB$  est le sous-groupe  $\text{ad}(g)B$  de  $G$ . Notons  $\underline{B}|_{\tilde{\mathfrak{g}}^{\text{reg}}}$  le changement de base de  $\underline{B}$  à  $\tilde{\mathfrak{g}}^{\text{reg}}$ . Le lemme ci-dessus montre qu'au-dessus de  $\tilde{\mathfrak{g}}^{\text{reg}}$ , on a un homomorphisme

$$I|_{\tilde{\mathfrak{g}}^{\text{reg}}} \rightarrow \underline{B}|_{\tilde{\mathfrak{g}}^{\text{reg}}}.$$

Par ailleurs, on dispose d'un homomorphisme de  $\underline{B}$  dans le  $G/B$ -tore  $T \times G/B$ . En composant, on obtient un homomorphisme  $G$ -équivariant

$$I|_{\tilde{\mathfrak{g}}^{\text{reg}}} \rightarrow T \times \tilde{\mathfrak{g}}^{\text{reg}}$$

qui est un isomorphisme au-dessus du lieu régulier semi-simple. Au-dessus du lieu régulier semi-simple, l'action de  $W$  sur  $I|_{\tilde{\mathfrak{g}}^{\text{reg}}}$  se transporte sur l'action diagonale de  $T \times \mathfrak{g}^{\text{rs}}$ . Par adjonction, on obtient un homomorphisme

$$I|_{\mathfrak{g}^{\text{reg}}} \rightarrow (\pi_{\mathfrak{g}})_*(T \times \tilde{\mathfrak{g}}^{\text{reg}}).$$

qui se factorise par le sous-foncteur des points fixes sous l'action diagonale de  $W$  sur  $(\pi_{\mathfrak{g}})_*(T \times \tilde{\mathfrak{g}}^{\text{reg}})$ .

Par descente, on obtient un homomorphisme  $J \rightarrow J^1$  qui est un isomorphisme au-dessus de  $\mathfrak{c}^{\text{rs}}$ .  $\square$

La proposition précédente admet la variante suivante. Considérons une réduction  $\rho \wedge^{\Theta_\rho} \text{Out}(\mathbb{G}) = \rho_G$  du tore  $\rho_G$  cf. 1.3.6. On dispose alors un revêtement fini plat  $\pi_\rho : X_\rho \times \mathfrak{t} \rightarrow \mathfrak{c}$  qui est génériquement étale galoisien de groupe de Galois  $\mathbb{W} \rtimes \Theta_\rho$  cf. 1.3.8. Ceci fournit une description légèrement différente de  $J^1$ .

**Lemme 2.4.4.** —  *$J^1$  est canoniquement isomorphe au sous-schéma des points fixes dans la restriction des scalaires à la Weil*

$$\prod_{(X_\rho \times \mathfrak{t})/\mathfrak{c}} (\mathbb{T} \times X_\rho \times \mathfrak{t})$$

pour l'action diagonale de  $\mathbb{W} \rtimes \Theta_\rho$  sur  $\mathbb{T} \times X_\rho \times \mathfrak{t}$ .

*Démonstration.* — L'assertion à démontrer étant locale pour la topologie étale de  $X$ , on peut supposer que  $\rho$  est trivial. Dans quel cas, elle est immédiate.  $\square$

En suivant [19], nous allons définir un sous-faisceau  $J'$  de  $J^1$  que nous démontrerons qu'il coïncide avec l'image de  $J \rightarrow J^1$ . Cette définition nécessitera un peu de préparations. La construction qui suit est locale pour la topologie étale de la base  $X$  de sorte qu'on peut supposer  $G$  déployé. Pour toute racine  $\alpha \in \Phi$ , soit  $h_\alpha$  l'hyperplan de  $\mathfrak{t}$  noyau de l'application linéaire  $d\alpha : \mathfrak{t} \rightarrow \mathbb{G}_a$ . Soit  $s_\alpha \in W$  la réflexion par rapport à l'hyperplan  $h_\alpha$ . Soit  $T^{s_\alpha}$  le sous-groupe de  $T$  des éléments fixes par  $s_\alpha$ . On a alors l'inclusion

$$\alpha(T^{s_\alpha}) \subset \{\pm 1\}.$$

Soient  $x$  un point géométrique de  $\mathfrak{t}$  tel que  $s_\alpha(x) = x$  et  $a$  son image dans  $\mathfrak{c}$ . Puisque  $J^1$  est la partie  $W$ -invariante du faisceau  $\prod_{\mathfrak{t}/\mathfrak{c}} (T \times \mathfrak{t})$ , on a un homomorphisme canonique de  $J_a^1$  dans la fibre  $T \times \{x\}$  dont l'image est contenue dans  $T^{s_\alpha} \times \{x\}$ . En composant avec la racine  $\alpha : T \rightarrow \mathbb{G}_m$ , on obtient un homomorphisme  $\alpha_x : J_a^1 \rightarrow \mathbb{G}_m$  d'image contenue dans  $\{\pm 1\}$ .

Soit  $J^0$  le sous-schéma en groupes ouvert des composantes neutres de  $J^1$ . Par construction  $J_a^0$  est la composante neutre de  $J_a^1$  de sorte que  $J_a^0$  est contenu dans le noyau de  $\alpha_x$ .

**Définition 2.4.5.** — *Soit  $J'$  le sous-foncteur de  $J^1$  défini comme suit. Pour tout  $\mathfrak{c}$ -schéma  $S$ , le groupe  $J'(S)$  est le sous-groupe de  $J^1(S)$  des morphismes*

$$f : S \times_{\mathfrak{c}} \mathfrak{t} \rightarrow T$$

tel que pour tout point géométrique  $x$  de  $S \times_{\mathfrak{c}} \mathfrak{t}$  tel que  $s_{\alpha}(x) = x$  pour une certaine racine  $\alpha$ , on a  $\alpha(f(x)) = 1$ . On a des inclusions de foncteurs  $J^0 \subset J' \subset J^1$ .

**Lemme 2.4.6.** — *Le foncteur  $J'$  de la catégorie des  $\mathfrak{c}$ -schémas dans la catégorie des groupes abéliens est représentable par un sous-schéma en groupes ouvert de  $J^1$ .*

*Démonstration.* — Il suffit de démontrer qu'il est représentable par un sous-schéma ouvert de  $J^1$  car étant un foncteur en sous-groupes, le schéma qui le représente sera automatiquement schéma en groupes. Considérons l'ouvert  $U$  de  $T \times \mathfrak{t}$  complément de la réunion sur toutes les racines  $\alpha \in \Phi$  des fermés  $\alpha^{-1}(-1) \times h_{\alpha}$ . La restriction à la Weil  $\text{Res}_{\mathfrak{t}/\mathfrak{c}}(U)$  est alors un sous-schéma ouvert de  $\text{Res}_{\mathfrak{t}/\mathfrak{c}}(T \times \mathfrak{t})$ . On a alors

$$J' = \text{Res}_{\mathfrak{t}/\mathfrak{c}}(U) \cap J^1$$

de sorte que  $J'$  est un sous-schéma ouvert de  $J^1$ .  $\square$

L'énoncé suivant est une variante d'un théorème de Donagi et Gaitsgory [19, théorème 11.6]. On propose ici une démonstration un peu différente.

**Proposition 2.4.7.** — *L'homomorphisme  $J \rightarrow J^1$  de 2.4.2 se factorise par le sous-schéma en groupes ouvert  $J'$  de 2.4.5 et induit un isomorphisme  $J \rightarrow J'$ .*

*Démonstration.* — Pour démontrer que  $J \rightarrow J^1$  se factorise par  $J'$ , il suffit de démontrer que pour tout  $a \in \mathfrak{c}(\bar{k})$ , l'homomorphisme  $\pi_0(J_a) \rightarrow \pi_0(J_a^1)$  se factorise par  $\pi_0(J'_a)$ . Il suffit de vérifier que fibre par fibre l'homomorphisme  $\pi_0(J_a) \rightarrow \pi_0(J_a^1)$  se factorise par  $\pi_0(J')$ . Rappelons que l'homomorphisme  $Z_G \rightarrow J_a$  induit un homomorphisme surjectif  $\pi_0(Z_G) \rightarrow \pi_0(J_a)$  d'après 2.3.2. Il suffit donc de vérifier que l'homomorphisme  $Z_G \rightarrow J_a^1$  se factorise par  $J'_a$ . Mais ceci est évident car la restriction de n'importe quelle racine à  $Z_G$  est triviale.

Puisque  $J$  et  $J'$  sont des schémas en groupes lisses et affines au-dessus de  $\mathfrak{c}$ , pour démontrer que l'homomorphisme  $J \rightarrow J'$  est un isomorphisme, il suffit de le faire au-dessus d'un ouvert de  $\mathfrak{c}$  dont le complément est un fermé de codimension deux. L'image inverse de  $\mathfrak{D}_G$  dans  $\mathfrak{t}$  est la réunion des hyperplans  $h_{\alpha}$  des racines. Soit  $\mathfrak{D}_G^{\text{sing}}$  le fermé de  $\mathfrak{D}_G$  dont l'image inverse est lieu des points appartenant à au moins deux hyperplans  $h_{\alpha}$ . Il est clair que  $\mathfrak{D}_G^{\text{sing}}$  est un fermé de codimension deux de  $\mathfrak{c}$ . Il suffit de

démontrer que l'isomorphisme entre  $J$  et  $J'$  sur  $\mathfrak{c} - \mathfrak{D}_G$  se prolonge en un isomorphisme sur  $\mathfrak{c} - \mathfrak{D}_G^{\text{sing}}$ .

Soit  $a \in (\mathfrak{c} - \mathfrak{D}_G^{\text{sing}})(\bar{k})$ . Il suffit de démontrer que l'homomorphisme  $J \rightarrow J'$  est un isomorphisme au-dessus d'un voisinage étale de  $a$ . Si  $a \notin \mathfrak{D}_G$ , il n'y a rien à démontrer car on a vu que  $J = J' = J^1$  sur l'ouvert  $\mathfrak{c} - \mathfrak{D}_G$ . Si maintenant  $a \in \mathfrak{D}_G - \mathfrak{D}_G^{\text{sing}}$ , on peut trouver  $s \in \mathfrak{t}(\bar{k})$  d'image  $a$  tel que  $s$  annulé par une unique racine  $\alpha$ . Soient  $T_\alpha$  le noyau de  $\alpha : T \rightarrow \mathbb{G}_m$  et  $H_\alpha$  le centralisateur de  $T_\alpha$ . Soit  $n$  un élément nilpotent régulier de l'algèbre de Lie  $\mathfrak{h}_\alpha$  de  $H_\alpha$  qui s'identifie à une sous-algèbre de Lie de  $\mathfrak{g}$ . L'élément  $x = s + n$  est un élément régulier de  $\mathfrak{g}$  d'image  $a$  dans  $\mathfrak{c}$ . Il est aussi un élément régulier de  $\mathfrak{h}_\alpha$  d'image  $a_{H_\alpha}$  dans l'espace des polynômes caractéristiques  $\mathfrak{c}_{H_\alpha}$  de  $H_\alpha$ . On vérifie que le morphisme  $\mathfrak{c}_{H_\alpha} \rightarrow \mathfrak{c}$  envoie  $a_{H_\alpha}$  en  $a$  et est étale en ce point. On peut aussi vérifier que dans un voisinage de  $a_{H_\alpha}$ , les images réciproques de  $J, J'$  et  $J^1$  à  $\mathfrak{c}_{H_\alpha}$  coïncide avec les mêmes groupes mais associés à  $H_\alpha$ . On peut ainsi ramener le problème au cas particulier des groupes de rang semi-simple un.

Un groupe semi-simple de rang un est isomorphe à un produit de  $\text{SL}_2$ ,  $\text{PGL}_2$  ou  $\text{GL}_2$  avec un tore. Il suffit donc de se restreindre à ces trois groupes. Par un calcul direct, on vérifie que le centralisateur  $J$  a une fibre non-connexe dans le cas  $\text{SL}_2$  alors que dans les deux autres cas, ses fibres sont toutes connexes. Il en est de même pour  $J'$ .  $\square$

**Corollaire 2.4.8.** — *L'homomorphisme  $J \rightarrow J^1$  de cf. 2.4.7, induit un isomorphisme sur leurs sous-schémas ouverts des composantes neutres des fibres.*

**2.5. Le cas des groupes endoscopiques.** — Considérons une donnée endoscopique  $(\kappa, \rho_\kappa)$  de  $G$  et le groupe endoscopique associé  $H$  cf. 1.8.1. On a défini un morphisme fini plat  $\nu : \mathfrak{c}_H \rightarrow \mathfrak{c}$  entre les  $X$ -schémas des polynômes caractéristiques de  $H$  et de  $G$  cf. 1.9. Le centralisateur régulier  $J$  sur  $\mathfrak{c}$  et le centralisateur  $J_H$  régulier de  $H$  sur  $\mathfrak{c}_H$  sont reliés de la façon suivante.

**Proposition 2.5.1.** — *Il existe un homomorphisme canonique*

$$\mu : \nu^* J \longrightarrow J_H$$

*qui est un isomorphisme au-dessus de l'ouvert  $\mathfrak{c}_H^{G-\text{rs}} = \nu^{-1}(\mathfrak{c}^{\text{rs}})$ .*



*Démonstration.* — Reprenons les notations de 1.9. En particulier, on a un revêtement fini plat  $X_{\rho_\kappa} \times \mathfrak{t} \rightarrow \mathfrak{c}$  qui permet de réaliser  $\mathfrak{c}$  comme le quotient invariant de  $X_{\rho_\kappa} \times \mathfrak{t}$  par  $\mathbb{W} \rtimes \pi_0(\kappa)$ . De même,  $\mathfrak{c}_H$  est le quotient invariant de  $X_{\rho_\kappa} \times \mathfrak{t}$  par  $\mathbb{W}_H \rtimes \pi_0(\kappa)$ . Rappelons aussi que le morphisme  $\nu : \mathfrak{c}_H \rightarrow \mathfrak{c}$  a été construit dans 1.9 en produisant un homomorphisme

$$\mathbb{W}_H \rtimes \pi_0(\kappa) \rightarrow \mathbb{W} \rtimes \pi_0(\kappa)$$

compatible avec les actions de ces deux groupes sur  $X_{\rho_\kappa} \times \mathfrak{t}$ .

Considérons le schéma en groupes

$$J^1 = \coprod_{X_\rho \times \mathfrak{t} / \mathfrak{c}} (X_\rho \times \mathfrak{t} \times \mathbb{T})^{\mathbb{W} \rtimes \pi_0(\kappa)}$$

et son analogue pour  $H$

$$J_H^1 = \coprod_{X_\rho \times \mathfrak{t} / \mathfrak{c}_H} (X_\rho \times \mathfrak{t} \times \mathbb{T})^{\mathbb{W}_H \rtimes \pi_0(\kappa)}$$

Le morphisme évident

$$X_{\rho_\kappa} \times \mathfrak{t} \rightarrow (X_{\rho_\kappa} \times \mathfrak{t}) \times_{\mathfrak{c}} \mathfrak{c}_H$$

qui est  $\mathbb{W}_H \rtimes \pi_0(\kappa)$ -équivariant, induit un homomorphisme  $\nu^* J^1 \rightarrow J_H^1$ . On a vérifié que cet homomorphisme est un isomorphisme au-dessus de l'ouvert  $\mathfrak{c}_H^{G-rs}$  dans 1.9.2.

D'après 2.4.8, on a un homomorphisme  $J \rightarrow J^1$  qui induit un isomorphisme sur leur sous-schéma ouvert des composantes neutres des fibres. Pour vérifier que l'homomorphisme  $\nu^* J^1 \rightarrow J_H^1$  se restreint en un homomorphisme  $\nu^* J \rightarrow J_H$ , il suffit de démontrer que pour tout  $a_H \in \mathfrak{c}_H(\bar{k})$  d'image  $a \in \mathfrak{c}(\bar{k})$ , l'homomorphisme

$$\pi_0(J_a^1) \rightarrow \pi_0(J_{H,a_H}^1)$$

qui se déduit de  $J_a^1 \rightarrow J_{H,a_H}^1$ , envoie le sous-groupe  $\pi_0(J_a) \subset \pi_0(J_a^1)$  dans le sous-groupe  $\pi_0(J_{H,a_H}) \subset \pi_0(J_{H,a_H}^1)$ . Puisque l'ensemble des racines de  $H$  est un sous-ensemble de l'ensemble des racines pour  $G$ , les conditions qui délimitent le sous-groupe  $\pi_0(J_{H,a_H})$  dans le groupe  $\pi_0(J_{H,a_H}^1)$  sont satisfaites par les éléments de  $\pi_0(J_a)$  cf. 2.4.5. La proposition suit.  $\square$

### 3. Fibres de Springer affines

Par analogie avec les fibres de Springer dans la résolution simultanée de Grothendieck-Springer, Kazhdan et Lusztig ont introduit les fibres de Springer affines et ont étudié leur propriété géométrique. Goresky,

Kottwitz et MacPherson ont réalisé le lien entre les fibres de Springer affine et les intégrales orbitales stables via le comptage de points de certain quotient des fibres de Springer affines. Dans ce chapitre, nous allons passer en revue les propriétés géométriques des fibres de Springer affine suivant Kazhdan et Lusztig en donnant quelques compléments. Le comptage de points sera revu dans le chapitre 8.

Voici les notations qui seront utilisées dans ce chapitre. Soient  $k$  un corps fini à  $q$  éléments et  $\bar{k}$  une clôture séparable de  $k$ . Soient  $F_v$  un corps local d'égalité caractéristiques,  $\mathcal{O}_v$  son anneau des entiers dont le corps résiduel  $k_v$  est une extension finie de  $k$ . On notera  $X_v = \text{Spec}(\mathcal{O}_v)$  le disque formel associé et  $X_v^\bullet$  le disque formel pointé. Soient  $v$  le point fermé de  $X_v$  et  $\eta_v$  son point générique.

Soient  $\bar{\mathcal{O}}_v = \mathcal{O}_v \hat{\otimes}_k \bar{k}$  et  $\bar{X}_v = \text{Spec}(\bar{\mathcal{O}}_v)$ . L'ensemble des composantes connexes de  $\bar{X}_v$  est en bijection l'ensemble des plongements de l'extension  $k_v$  de  $k$  dans  $\bar{k}$

$$\bar{X}_v = \bigsqcup_{\bar{v}: k_v \rightarrow \bar{k}} \bar{X}_{\bar{v}}.$$

En choisissant un point géométrique  $\bar{\eta}_v$  dans la fibre géométrique de  $\bar{X}_{\bar{v}}$ , on obtient la suite exacte habituelle

$$1 \rightarrow I_v \rightarrow \Gamma_v \rightarrow \text{Gal}(\bar{k}/k_v) \rightarrow 1$$

où  $\Gamma_v = \pi_1(\eta_v, \bar{\eta}_v)$  est le groupe de Galois de  $F_v$  et  $I_v = \pi_1(\bar{X}_{\bar{v}}, \bar{\eta}_v)$  son sous-groupe d'inertie.

Soit  $G$  une forme quasi-déployée de  $\mathbb{G}$  sur  $X_v$  associée à un  $\text{Out}(\mathbb{G})$ -torseur  $\rho_G$ . En choisissant un point géométrique de  $\bar{\eta}_{\text{Out},v}$  de  $\rho_G$  au-dessus de  $\bar{\eta}_v$ , on obtient un homomorphisme  $\rho_G^\bullet: \Gamma_v \rightarrow \text{Out}(\mathbb{G})$  qui se factorise à travers  $\text{Gal}(\bar{k}/k_v)$ . Au-dessus de  $\bar{X}_v$ ,  $\rho_G$  est le toseur trivial. Le point de  $\bar{\eta}_{\text{Out},v}$  fournit une trivialisation de  $\rho_G$  au-dessus de  $\bar{X}_{\bar{v}}$ .

**3.1. Rappels sur la grassmannienne affine.** — Pour tout  $k$ -schéma  $S$ , notons  $X_v \hat{\times} S$  la complétion  $v$ -adique de  $X_v \times S$  et  $X_v^\bullet \hat{\times} S$  l'ouvert complémentaire de  $\{v\} \times S$  dans  $X_v \hat{\times} S$ . La grassmannienne affine est le foncteur  $\mathcal{G}_v$  qui associe à tout  $k$ -schéma le groupoïde des  $G$ -torseurs  $E_v$  sur  $X_v \hat{\times} S$  munis d'une trivialisation sur  $X_v^\bullet \hat{\times} S$ . Notons qu'un automorphisme de  $E_v$ , trivial sur  $X_v^\bullet \hat{\times} S$  est nécessairement trivial de sorte que ce groupoïde est une catégorie discrète. On pourra aussi bien le remplacer par l'ensemble des classes d'isomorphisme.

D'après [4] et [21], on sait que  $\mathcal{G}_v$  est strictement représentable par un ind-schéma sur  $k$ . Plus précisément, il existe système injectif de  $k$ -schémas

projectifs dont les flèches sont immersions fermées et dont la limite inductive représente le foncteur  $\mathcal{G}_v$ . Comme  $G$  est un schéma en groupes de fibres connexes, l'ensemble des  $k$ -points de  $\mathcal{G}_v$  s'exprime comme un quotient

$$\mathcal{G}_v(k) = G(F_v)/G(\mathcal{O}_v).$$

Quand  $G = \mathrm{GL}_r$ , cet ensemble s'identifie naturellement à l'ensemble des  $\mathcal{O}_v$ -réseaux dans le  $F_v$ -espace vectoriel  $F_v^{\oplus r}$ .

La même définition vaut quand on remplace  $k$  par  $\bar{k}$ ,  $X_v$  par  $\bar{X}_{\bar{v}}$  pour tout plongement  $\bar{v} : k_v \rightarrow \bar{k}$ . On a alors la grassmannienne affine  $\mathcal{G}_{\bar{v}}$  définie sur  $\bar{k}$ . On a la formule

$$\mathcal{G} \otimes_k \bar{k} = \prod_{\bar{v}: k_v \rightarrow \bar{k}} \mathcal{G}_{\bar{v}}.$$

**3.2. Fibres de Springer affines.** — Nous gardons les notations de 1.3. En particulier, on a un schéma  $\mathfrak{c}$  au-dessus de  $X_v$  obtenu par torsion extérieure de l'espace des polynômes caractéristiques  $\mathfrak{c}$  de  $\mathfrak{g}$  comme dans le théorème de Chevalley 1.1.1.

Notons

$$\mathfrak{c}^{\heartsuit}(\mathcal{O}_v) = \mathfrak{c}(\mathcal{O}_v) \cap \mathfrak{c}^{\mathrm{rs}}(F_v)$$

l'ensemble des  $\mathcal{O}_v$ -points de  $\mathfrak{c}$  dont la fibre générique est régulière semi-simple. Rappelons qu'on a la section de Kostant  $\epsilon : \mathfrak{c} \rightarrow \mathfrak{g}^{\mathrm{reg}}$  cf. 1.3.4. Pour tout  $a \in \mathfrak{c}^{\heartsuit}(\mathcal{O}_v)$ , on a un point

$$[\epsilon](a) \in [\mathfrak{g}^{\mathrm{reg}}/G]$$

qui consiste en le  $G$ -torseur trivial  $E_0$  sur  $X_v$  et une section  $\gamma_0 \in \Gamma(X_v, \mathrm{ad}(E_0))$  ayant  $a$  comme polynôme caractéristique.

Pour chaque  $a \in \mathfrak{c}^{\heartsuit}(\mathcal{O}_v)$ , on définit la fibre de Springer affine  $\mathcal{M}_v(a)$  comme suit. Le foncteur  $\mathcal{M}_v(a)$  associe à tout  $k$ -schéma  $S$  le groupoïde des couples  $(E, \phi)$  formé d'un  $G$ -torseur  $E$  sur  $X_v \hat{\times} S$  et d'une section  $\phi$  de  $\mathrm{ad}(E)$ , munis d'un isomorphisme avec  $(E_0, \gamma_0)$  sur  $X_v^{\bullet} \hat{\times} S$ . En particulier

$$[\chi](E, \phi) = [\chi](E_0, \gamma_0) = a.$$

Notons que par construction, le  $G$ -torseur  $E_0$  est le torseur trivial si bien que  $E$  détermine un point de la Grassmannienne affine.

**Proposition 3.2.1.** — *Le foncteur d'oubli  $(E, \phi) \mapsto E$  définit un morphisme de la fibre de Springer affine  $\mathcal{M}_v(a)$  dans la grassmannienne affine  $\mathcal{G}_v$  qui est une immersion fermée. En particulier,  $\mathcal{M}_v(a)$  est strictement*

représentable par un ind-schéma. De plus, le réduit  $\mathcal{M}_v^{\text{red}}(a)$  de  $\mathcal{M}_v(a)$  est représentable par un schéma localement de type fini.

*Démonstration.* — La première assertion est immédiate. La seconde assertion a été démontrée par Kazhdan et Lusztig [34].  $\square$

Considérons l'ensemble des  $k$ -points de  $\mathcal{M}_v(a)$ . Soit  $(E, \phi)$  un objet de  $\mathcal{M}_v(a, k)$ . Les fibres génériques de  $E$  et de  $E_0$  étant identifiées, la donnée de  $E$  consiste en une classe  $g \in G(F_v)/G(\mathcal{O}_v)$ . Puisque  $\phi$  est identifiée à  $\gamma_0$  sur la fibre générique, pour que  $\phi$  définisse une section sur  $X_v$  de  $\text{ad}(E) \otimes D$ , il faut et il suffit que  $\text{ad}(g)^{-1}\gamma_0 \in \mathfrak{g}(\mathcal{O}_v)$ . On a donc

$$\mathcal{M}_v(a, k) = \{g \in G(F_v)/G(\mathcal{O}_v) \mid \text{ad}(g)^{-1}\gamma_0 \in \mathfrak{g}(\mathcal{O}_v)\}.$$

Nous allons maintenant considérer une variation triviale de la construction précédente en présence d'un faisceau inversible  $D'$  sur  $X_v$ . Cette variation sera nécessaire pour réaliser le passage entre les fibres de Springer affines et les fibres de Hitchin.

Soient  $D = D'^{\otimes 2}$  et  $h_D : X_v \rightarrow \mathbf{B}\mathbb{G}_m$  le morphisme dans le classifiant de  $\mathbb{G}_m$  correspondant au fibré en droites  $D$ . Fixons un morphisme  $h_a : X_v \rightarrow [\mathfrak{c}/\mathbb{G}_m]$  qui s'insère dans le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} X_v & \xrightarrow{h_a} & [\mathfrak{c}/\mathbb{G}_m] \\ & \searrow h_D & \downarrow \\ & & \mathbf{B}\mathbb{G}_m \end{array}$$

Notons  $[\epsilon]^{D'}(a)$  le point de Kostant de  $a$  construit comme dans le lemme 2.2.5. On notera  $a^\bullet$  et  $h_a^\bullet$  les restrictions de  $a$  et de  $h_a$  à  $X_v^\bullet$  et on notera le point de Kostant associé  $[\epsilon]^{D'}(a^\bullet)$ .

**Définition 3.2.2.** — On définit la fibre de Springer  $\mathcal{M}_v(a)$  comme le foncteur qui associe à tout  $k$ -schéma  $S$  l'ensemble  $\mathcal{M}_v(a, S)$  des classes d'isomorphisme des morphismes  $h_{E, \phi} : X_v \hat{\times} S \rightarrow [\mathfrak{g}/G \times \mathbb{G}_m]$  s'insérant dans le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} X_v \hat{\times} S & \xrightarrow{h_{E, \phi}} & [\mathfrak{g}/G \times \mathbb{G}_m] \\ & \searrow h_a & \downarrow [\chi] \\ & & [\mathfrak{c}/\mathbb{G}_m] \end{array}$$

*munis d'un isomorphisme entre la restriction de  $h_{E,\phi}$  à  $X_v^\bullet \hat{\times} S$ , et le point de Kostant  $[\epsilon]^{D'}(a^\bullet)$ .*

La même définition vaut quand on remplace  $k$  par  $\bar{k}$ ,  $X_v$  par  $\bar{X}_{\bar{v}}$  pour tout plongement  $\bar{v} : k_v \rightarrow \bar{k}$ . Pour tout  $a \in \mathfrak{c}(\bar{\mathcal{O}}_{\bar{v}}) \cap \mathfrak{c}^{\text{rs}}(\bar{F}_{\bar{v}})$ , on a alors la fibre de Springer affine  $\mathcal{M}_{\bar{v}}(a)$  définie sur  $\bar{k}$ . Pour tout  $a \in \mathfrak{c}(\mathcal{O}_v) \cap \mathfrak{c}^{\text{rs}}(F_v)$ , on a la formule

$$\mathcal{M}_v(a) \otimes_k \bar{k} = \prod_{\bar{v}:k_v \rightarrow \bar{k}} \mathcal{M}_{\bar{v}}(a).$$

**3.3. Symétries d'une fibre de Springer affine.** — Le centralisateur régulier permet de définir le groupe des symétries d'une fibre de Springer affine. Soient  $a \in \mathfrak{c}^\heartsuit(\mathcal{O}_v)$  et  $h_a : X_v \rightarrow \mathfrak{c}$  le morphisme correspondant. Soit  $J_a = h_a^* J$  l'image réciproque du centralisateur régulier.

Considérons le groupoïde de Picard  $\mathcal{P}_v(J_a)$  fibré au-dessus de  $\text{Spec}(k)$  qui associe à tout  $k$ -schéma  $S$  le groupoïde de Picard  $\mathcal{P}_v(J_a, S)$  des  $J_a$ -torseurs sur  $X_v \hat{\times} S$  munis d'une trivialisation sur  $X_v^\bullet \hat{\times} S$ . On peut vérifier que pour tout  $k$ -schéma  $S$ ,  $\mathcal{P}_v(J_a, S)$  est une catégorie de Picard discrète. De plus, le foncteur qui associe à  $S$  le groupe des classes d'isomorphisme de  $\mathcal{P}_v(J_a, S)$  est représentable par un ind-schéma en groupes sur  $k$  qu'on notera  $\mathcal{P}_v(J_a)$ . Le groupe des  $\bar{k}$ -points  $\mathcal{P}_v(J_a, \bar{k})$  s'identifie canoniquement au quotient  $J_a(\bar{F}_v)/J_a(\bar{\mathcal{O}}_v)$ . Si les fibres de  $J_a$  sont connexes, l'ensemble des  $k$ -points de  $\mathcal{P}_v(J_a)$  s'identifie au quotient  $J_a(F_v)/J_a(\mathcal{O}_v)$ .

Le lemme 2.1.1 permet de définir une action de  $\mathcal{P}_v$  sur  $\mathcal{M}_v$ . En effet, pour tout  $(E, \phi) \in \mathcal{M}_v(S)$ , on a un homomorphisme de faisceaux en groupes au-dessus de  $X_v \hat{\times} S$

$$J_a \longrightarrow \underline{\text{Aut}}(E, \phi)$$

qui se déduit de 2.1.1. Ceci permet de tordre  $(E, \phi)$  par un  $J_a$ -torseur sur  $X_v \hat{\times} S$  qui est trivialisé sur  $X_v^\bullet \hat{\times} S$ .

Sur les  $k$ -points, on peut décrire concrètement cette action. Pour simplifier l'exposition, supposons que  $J_a$  a des fibres connexes. L'action du groupe  $\mathcal{P}_v(J_a, k) = J_a(F_v)/J_a(\mathcal{O}_v)$  sur l'ensemble

$$\mathcal{M}_v(a, k) = \{g \in G(F_v)/G(\mathcal{O}_v) \mid \text{ad}(g)^{-1}\gamma_0 \in \mathfrak{g}(\mathcal{O}_v)\}$$

se décrit concrètement comme suit. D'après 2.1.1, il existe un isomorphisme canonique de  $J_a(F_v)$  sur le centralisateur  $G_{\gamma_0}(F_v)$  de  $\gamma_0$  qu'on va noter  $j \mapsto \theta(j)$ . On fait agir  $J_a(F_v)$  sur l'ensemble des  $g \in G(F_v)$  tels que  $\text{ad}(g)^{-1}(\gamma_0) \in \mathfrak{g}(\mathcal{O}_v)$  par  $j.g = \theta(j)g$ . Pour que ceci induise une action de

$J_a(F_v)/J_a(\mathcal{O}_v)$  sur  $\mathcal{M}_v(a, k)$ , il faut et il suffit que pour tout  $g \in \mathcal{M}_v(a, k)$ , on a l'inclusion

$$\theta(J_a(\mathcal{O}_v)) \subset \text{ad}(g)G(\mathcal{O}_v).$$

Soit  $\gamma = \text{ad}(g)^{-1}\gamma_0 \in \mathfrak{g}(\mathcal{O}_v)$ . D'après 2.1.1, l'isomorphisme  $\text{ad}(g)^{-1} \circ \theta : I_a \rightarrow G_{\gamma_0}$  se prolonge en un homomorphisme de  $X_v$ -schémas en groupes sur

$$\text{ad}(g)^{-1} \circ \theta : J_a \longrightarrow I_\gamma$$

ce qui implique en particulier que

$$\theta(J_a(\mathcal{O}_v)) \subset \text{ad}(g)(I_{\gamma_0}(\mathcal{O}_v)) \subset \text{ad}(g)G(\mathcal{O}_v).$$

Nous considérons le sous-foncteur  $\mathcal{M}_v^{\text{reg}}(a)$  de la fibre de Springer affine  $\mathcal{M}_v(a)$  dont les points sont les morphismes  $h_{E,\phi} : X_v \rightarrow [\mathfrak{g}/G \times \mathbb{G}_m]$  qui se factorisent par l'ouvert  $[\mathfrak{g}^{\text{reg}}/G \times \mathbb{G}_m]$ . Il est clair que  $\mathcal{M}_v^{\text{reg}}(a)$  est un ouvert de  $\mathcal{M}_v(a)$ .

**Lemme 3.3.1.** — *L'ouvert  $\mathcal{M}_v^{\text{reg}}(a)$  est un espace principal homogène sous l'action de  $\mathcal{P}_v(J_a)$ .*

*Démonstration.* — C'est une conséquence du lemme 2.2.1.  $\square$

Soit  $\bar{v} : k_v \rightarrow \bar{k}$ . Pour tout  $a \in \mathfrak{c}(\bar{\mathcal{O}}_{\bar{v}}) \cap \mathfrak{c}^{\text{rs}}(\bar{F}_{\bar{v}})$ , on a le groupe des symétries  $\mathcal{P}_{\bar{v}}(J_a)$  définie sur  $\bar{k}$  de la fibre affine  $\mathcal{M}_{\bar{v}}(a)$ . Si  $a \in \mathfrak{c}(\mathcal{O}_v) \cap \mathfrak{c}^{\text{rs}}(F_v)$ , on a la formule

$$\mathcal{P}_v(J_a) \otimes_k \bar{k} = \prod_{\bar{v}:k_v \rightarrow \bar{k}} \mathcal{P}_{\bar{v}}(J_a).$$

Dans la suite du chapitre, on va passer à  $\bar{k}$  et discuter des propriétés géométriques de  $\mathcal{P}_{\bar{v}}(J_a)$ . Rappelons qu'au-dessus de  $\bar{X}_{\bar{v}}$ ,  $G$  est un groupe déployé.

**3.4. Quotient projectif d'une fibre de Springer affine.** — Soit  $a \in \mathfrak{c}(\bar{\mathcal{O}}_{\bar{v}})$  dont la fibre générique est dans  $\mathfrak{c}^{\text{rs}}(\bar{F}_{\bar{v}})$ . D'après Kazhdan et Lusztig, le foncteur  $\mathcal{M}_{\bar{v}}(a)$  a un schéma réduit sous-jacent  $\mathcal{M}_{\bar{v}}^{\text{red}}(a)$  qui est localement de type fini cf. 3.2.1 et [34]. Ils ont aussi démontré que  $\mathcal{M}_{\bar{v}}^{\text{red}}(a)$ , quotienté par un groupe discret convenable, est un schéma projectif. Rappelons leur énoncé de façon plus précise.

Soit  $\Lambda$  le quotient libre maximal de  $\pi_0(\mathcal{P}_{\bar{v}}(J_a))$ . Choisissons un relèvement arbitraire

$$\Lambda \rightarrow \mathcal{P}_{\bar{v}}(J_a)$$

qui induit une action de  $\Lambda$  sur  $\mathcal{M}_{\bar{v}}(a)$  et  $\mathcal{M}_{\bar{v}}^{\text{red}}(a)$ .

**Proposition 3.4.1.** — *Le groupe discret  $\Lambda$  agit librement sur  $\mathcal{M}_{\bar{v}}^{\text{red}}(a)$  et le quotient  $\mathcal{M}_{\bar{v}}^{\text{red}}(a)/\Lambda$  est un  $\bar{k}$ -schéma projectif.*

*Démonstration.* — La proposition 1 de [34, page 138] montre que  $\Lambda$  agit librement sur  $\mathcal{M}_{\bar{v}}^{\text{red}}(a)$  et qu'en tronquant la fibre de Springer affine réduite  $\mathcal{M}_{\bar{v}}^{\text{red}}(a)$ , on obtient des schémas projectifs qui se surjectent sur le quotient  $\mathcal{M}_{\bar{v}}^{\text{red}}(a)/\Lambda$ . Il s'ensuit que le quotient est également un schéma projectif.  $\square$

**3.5. Approximation.** — D'après un théorème bien connu de Harish-Chandra, les intégrales orbitales semi-simples régulières sont localement constantes. Dans ce paragraphe, nous allons montrer une variante géométrique, plus forte, de ce théorème.

**Proposition 3.5.1.** — *Soient  $a \in \mathfrak{c}(\mathcal{O}_v) \cap \mathfrak{c}^{\text{rs}}(F_v)$ ,  $\mathcal{M}_a$  la fibre de Springer affine et  $\mathcal{P}_v(J_a)$  le groupe des symétries de  $\mathcal{M}_v(a)$ . Il existe alors un entier  $N$  tel que pour toute extension finie  $k'$  de  $k$ , pour tout  $a' \in \mathfrak{c}(\mathcal{O}_v \otimes_k k')$  tel que*

$$a \equiv a' \pmod{\epsilon_v^N},$$

*la fibre de Springer affine  $\mathcal{M}_v(a')$  munie de l'action de  $\mathcal{P}_v(J_{a'})$  est isomorphe à  $\mathcal{M}_v(a) \otimes_k k'$  munie de l'action de  $\mathcal{P}_v(J_a) \otimes_k k'$ .*

*Démonstration.* — Considérons le revêtement caméral  $\tilde{X}_{a,v}$  de  $X_v$  associé à  $a$  construit en formant le diagramme cartésien

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X}_{a,v} & \longrightarrow & \mathfrak{t} \\ \pi_a \downarrow & & \downarrow \\ X_v & \xrightarrow{a} & \mathfrak{c} \end{array}$$

Le morphisme  $\pi_a$  est fini plat et génériquement étale. Le revêtement  $\tilde{X}_{a,v}$  est muni d'une action de  $W$  qui se déduit de l'action de  $W$  sur  $\mathfrak{t}$ . On associe aussi à  $a' \in \mathfrak{c}(\mathcal{O}_v \otimes_k k')$  son revêtement caméral  $\tilde{X}_{a',v} \rightarrow X_v \otimes_k k'$ .

**Lemme 3.5.2.** — *Soit  $a \in \mathfrak{c}(\mathcal{O}_v) \cap \mathfrak{c}^{\text{rs}}(F_v)$ . Il existe un entier  $N$  tel que pour toute extension finie  $k'$  de  $k$ , pour tout  $a' \in \mathfrak{c}(\mathcal{O}_v \otimes_k k')$  tel que*

$$a \equiv a' \pmod{\epsilon_v^N},$$

*le revêtement  $\tilde{X}_{a',v}$  de  $X_v \otimes_k k'$  muni de l'action de  $W$  est isomorphe au revêtement  $\tilde{X}_{a,v} \otimes_k k'$  muni de l'action de  $W$ . On peut demander en plus que l'isomorphisme relève l'isomorphisme évident module  $\epsilon_v^N$ .*

*Démonstration.* — C'est un cas particulier d'un lemme d'Artin-Hironaka [3, lemme 3.12]. La seconde assertion est implicite dans la démonstration d'Artin.  $\square$

Supposons que les revêtement caméraux  $\tilde{X}_{a,v}$  et  $\tilde{X}_{a',v}$  de  $X_v \otimes_k k'$  sont isomorphes, démontrons que  $\mathcal{M}_v(a) \otimes_k k'$  munie de l'action de  $\mathcal{P}_v(J_a) \otimes_k k'$  et  $\mathcal{M}_v(a')$  munie de l'action de  $\mathcal{P}_v(J_{a'})$  sont isomorphes. En remplaçant  $k$  par  $k'$ , on peut désormais supposer  $k = k'$ .

Pour cela, il nous faut une description de la fibre de Springer affine en termes du centralisateur régulier. Soit  $\gamma_0 = \epsilon(a) : X_v \rightarrow \mathfrak{g}$  la section de Kostant de  $a$ . On a alors un isomorphisme canonique entre  $J_a$  et le  $X_v$ -schéma en groupes  $I_{\gamma_0} = \gamma_0^* I$  où  $I$  est le schéma en groupes des centralisateurs au-dessus de  $\mathfrak{g}$ . L'homomorphisme évident  $I_{\gamma_0} \rightarrow G$  induit un homomorphisme injectif de fibrés vectoriels sur  $X_v$

$$\mathrm{Lie}(I_{\gamma_0}) \rightarrow \mathfrak{g}.$$

L'énoncé suivant montre que la fibre de Springer affine  $\mathcal{M}_v(a)$  ne dépend pas de  $\gamma_0$  mais seulement de la sous-algèbre de Lie commutative  $\mathrm{Lie}(I_{\gamma_0})$  de  $\mathfrak{g}$ .

**Lemme 3.5.3.** — *Soit  $g \in G(F_v)$ . Alors on a  $\mathrm{ad}(g)^{-1}(\gamma_0) \in \mathfrak{g}(\mathcal{O}_v)$  si et seulement si  $\mathrm{ad}(g)^{-1}\mathrm{Lie}(I_{\gamma_0}) \subset \mathfrak{g}(\mathcal{O}_v)$ .*

*Démonstration.* — Comme  $\gamma_0 \in \mathrm{Lie}(I_{\gamma_0})$ ,  $\mathrm{ad}(g)^{-1}\mathrm{Lie}(I_{\gamma_0}) \subset \mathfrak{g}(\mathcal{O}_v)$  implique immédiatement  $\mathrm{ad}(g)^{-1}(\gamma_0) \in \mathfrak{g}(\mathcal{O}_v)$ . Inversement, soit  $g \in G(F_v)$  tel que  $\gamma = \mathrm{ad}(g)^{-1}(\gamma_0) \in \mathfrak{g}(\mathcal{O}_v)$ . Soit  $I_\gamma = \gamma^* I$ . Le fait cf. 2.1.1 que l'isomorphisme en fibre générique

$$\mathrm{ad}(g)^{-1} : J_{a,F_v} = I_{\gamma_0,F_v} \rightarrow I_{\gamma,F_v}$$

se prolonge en un homomorphisme  $J_a \rightarrow I_\gamma$  implique en particulier que  $\mathrm{ad}(g)^{-1}\mathrm{Lie}(I_{\gamma_0}) \subset \mathfrak{g}(\mathcal{O}_v)$ .  $\square$

Pour terminer la démonstration de la proposition 3.5.1, il suffit de démontrer le lemme suivant.  $\square$

**Lemme 3.5.4.** — *Soient  $a, a' \in \mathfrak{c}(\mathcal{O}_v) \cap \mathfrak{c}_{\mathrm{rs}}(F_v)$  tels que  $a \equiv a' \pmod{\epsilon_v}$ . Supposons qu'il existe un isomorphisme entre les revêtements caméraux  $\tilde{X}_{a,v}$  et  $\tilde{X}_{a',v}$  munis de l'action de  $W$  qui relève l'isomorphisme évident dans la fibre spéciale. Soient  $\gamma_0 = \epsilon(a)$  la section de Kostant de  $a$  et  $\gamma'_0 = \epsilon(a')$  la section de Kostant de  $a'$ . Soient  $I_{\gamma_0}$  et  $I_{\gamma'_0}$  les sous-schémas*



en groupes de  $G$  centralisateurs des sections  $\gamma_0$  et  $\gamma'_0$ . Alors il existe  $g \in G(\mathcal{O}_v)$  tel que

$$\mathrm{ad}(g)^{-1}I_{\gamma_0} = I_{\gamma'_0}.$$

*Démonstration.* — Ce lemme est une conséquence d'un résultat de Donagi et Gaitsgory [19, théorème 11.8]. Pour la commodité du lecteur, nous allons en extraire la portion utile à notre propos. Puisque les schémas en groupes  $I_{\gamma_0}$  et  $I_{\gamma'_0}$  sont complètement déterminés par les revêtements caméraux  $\tilde{X}_{a,v}$  respectivement  $\tilde{X}_{a',v}$  cf. 2.4.7, l'isomorphisme entre  $\tilde{X}_{a,v}$  et  $\tilde{X}_{a',v}$  induit un isomorphisme  $\iota : I_{\gamma_0} \rightarrow I_{\gamma'_0}$ . Cet isomorphisme transporte  $\gamma_0 \in \mathrm{Lie}(I_{\gamma_0})$  en un élément  $\iota(\gamma_0) \in \mathrm{Lie}(I_{\gamma'_0})$ . Puisque les fibres spéciales de  $\iota(\gamma_0)$  et  $\gamma'_0$  coïncident,  $\iota(\gamma_0) : X_v \rightarrow \mathfrak{g}$  se factorise par l'ouvert  $\mathfrak{g}^{\mathrm{reg}}$ . On en déduit l'égalité  $I_{\iota(\gamma_0)} = I_{\gamma'_0}$  de sous-schémas en groupes de  $G$ .

On dispose de deux sections

$$\gamma_0, \iota(\gamma_0) : X_v \rightarrow \mathfrak{g}^{\mathrm{reg}}$$

qui ont le même polynôme caractéristique  $a$  et qui sont égales module  $\epsilon_v$ . Puisque le morphisme

$$G \times_X \mathfrak{g}^{\mathrm{reg}} \rightarrow \mathfrak{g}^{\mathrm{reg}} \times_{\mathfrak{c}} \mathfrak{g}^{\mathrm{reg}}$$

est un morphisme lisse, il existe  $g \in G(\mathcal{O}_v)$  tel que  $g \equiv 1 \pmod{\epsilon_v}$  et tel que  $\mathrm{ad}(g^{-1}(\gamma_0)) = \iota(\gamma_0)$ . On en déduit que

$$\mathrm{ad}(g)^{-1}(I_{\gamma_0}) = I_{\iota(\gamma_0)} = I_{\gamma'_0}.$$

C'est ce qu'on voulait. □

**3.6. Cas linéaire.** — Examinons maintenant les fibres de Springer affines du groupe linéaire en suivant la présentation de Laumon [50]. Nous référons à [57] pour une discussion similaire dans le cas des groupes classiques. Soit  $G = \mathrm{GL}(r)$ .

On garde les notations fixées au début de ce chapitre. Un point  $a \in \mathfrak{c}(\bar{\mathcal{O}}_{\bar{v}})$  est représenté par un polynôme unitaire de degré  $r$  de variable  $t$

$$P(a, t) = t^r - a_1 t^{r-1} + \cdots + (-1)^r a_r \in \bar{\mathcal{O}}_{\bar{v}}[t]$$

Formons la  $\bar{\mathcal{O}}_{\bar{v}}$ -algèbre finie et plate de rang  $r$

$$B = \bar{\mathcal{O}}_{\bar{v}}[t]/P(a, t)$$

et notons  $E = B \otimes_{\bar{\mathcal{O}}_{\bar{v}}} \bar{F}_{\bar{v}}$ . L'hypothèse  $a \in \mathfrak{c}^{\heartsuit}(\bar{\mathcal{O}}_{\bar{v}})$  implique que  $E$  est une  $\bar{F}_{\bar{v}}$ -algèbre finie étale de dimension  $r$ . On peut écrire  $E$  comme un produit  $E_1 \times \cdots \times E_s$  de  $s$  extensions séparables de  $\bar{F}_{\bar{v}}$  avec  $s \leq r$ .

**3.6.1.** — Dans cette situation, on a une description de la fibre de Springer en termes des réseaux. Les  $\bar{k}$ -points de la fibre de Springer  $\mathcal{M}_{\bar{v}}(a)$  est l'ensemble des  $B$ -réseaux dans  $E$  c'est-à-dire des  $B$ -modules  $\mathcal{L}$  qui sont contenus dans le  $\bar{F}_{\bar{v}}$ -espace vectoriel  $E$  comme un  $\bar{\mathcal{O}}_{\bar{v}}$ -réseau. Les  $\bar{k}$ -points de la partie régulière  $\mathcal{M}_{\bar{v}}^{\text{reg}}(a)$  consistent des  $B$ -réseaux de  $E$  qui sont des  $B$ -modules libres. Les  $\bar{k}$ -points du groupe des symétries  $\mathcal{P}_{\bar{v}}(J_a)$  est le groupe  $E^{\times}/B^{\times}$ .

**3.6.2.** — La normalisation  $B^b$  de  $B$  est l'anneau des entiers de  $E_{\bar{v}}$ . On a alors un dévissage de  $E^{\times}/B^{\times}$

$$1 \rightarrow (B^b)^{\times}/B^{\times} \rightarrow E^{\times}/B^{\times} \rightarrow E^{\times}/(B^b)^{\times} \rightarrow 1$$

où  $(B^b)^{\times}/B^{\times}$  est le groupe des  $\bar{k}$ -points de la composante neutre du groupe  $\mathcal{P}_{\bar{v}}(J_a)$ . Par conséquent, le groupe des composantes connexes  $\pi_0(\mathcal{P}_{\bar{v}}(J_a))$  est canoniquement isomorphe à  $E^{\times}/(B^b)^{\times}$  qui est un groupe abélien libre muni d'une base indexée par l'ensemble des composantes connexes de  $\text{Spec}(B^b)$ .

**3.6.3.** — Dans ce cas, la dimension de  $\mathcal{P}_{\bar{v}}(J_a)$  est égale à l'invariant  $\delta$  de Serre

$$\delta_{\bar{v}}(a) = \dim(\mathcal{P}_{\bar{v}}(J_a)) = \dim_k(B^b/B).$$

Par ailleurs, cet entier peut être exprimé en fonction du discriminant. Soit  $d_{\bar{v}}(a) = \text{val}_{\bar{v}}(\mathfrak{D}(a))$  la valuation  $\bar{v}$ -adique du discriminant de  $a$ . D'après [66, III.3 proposition 5 et III.6 corollaire 1], on a la formule

$$\delta_{\bar{v}}(a) = (d_{\bar{v}}(a) - c_{\bar{v}}(a))/2$$

où  $c_{\bar{v}}(a) = r - s$ .

**3.7. Dimension.** — Dans [34], Kazhdan et Lusztig ont montré que

$$\dim(\mathcal{M}_{\bar{v}}(a)) = \dim(\mathcal{M}_{\bar{v}}^{\text{reg}}(a)).$$

On peut en fait déduire un énoncé plus précis à partir de leurs résultats.

**Proposition 3.7.1.** — *Le complémentaire de l'ouvert régulier  $\mathcal{M}_{\bar{v}}^{\text{reg}}(a)$  de la fibre de Springer  $\mathcal{M}_{\bar{v}}(a)$  est de dimension strictement plus petite que celle de  $\mathcal{M}_{\bar{v}}(a)$ .*

*Démonstration.* — Pour discuter de la dimension, on peut négliger les nilpotents dans les anneaux structuraux de  $\mathcal{M}_{\bar{v}}(a)$ . Comme rappelé dans le paragraphe 3.2,  $\mathcal{M}_{\bar{v}}(a)$  est la sous-variété de la Grassmannienne affine des  $g \in G(F_{\bar{v}})/G(\mathcal{O}_{\bar{v}})$  tel que  $\mathrm{ad}(g)^{-1}(\gamma_0) \in \mathfrak{g}(\mathcal{O}_{\bar{v}})$ .

A la suite de Kazhdan et Lusztig, considérons aussi la sous-variété des points fixes  $\mathcal{B}_{\bar{v}}(a)$  des drapeaux affines fixes sous  $\gamma_0$  c'est-à-dire  $g \in G(F_{\bar{v}})/\mathrm{Iw}_{\bar{v}}$  tel que  $\mathrm{ad}(g)^{-1}\gamma_0 \in \mathrm{Lie}(\mathrm{Iw}_{\bar{v}})$ . Ici  $\mathrm{Iw}_{\bar{v}}$  est un sous-groupe d'Iwahori de  $G(\mathcal{O}_{\bar{v}})$ . Dans [34], Kazhdan et Lusztig ont démontré que les fibres de Springer affines pour les sous-groupes d'Iwahori sont équidimensionnelles. L'équidimensionalité des fibres de Springer classiques a été démontrée auparavant par Spaltenstein [69].

Le morphisme  $\mathcal{B}_{\bar{v}}(a) \rightarrow \mathcal{M}_{\bar{v}}(a)$  est un morphisme fini au-dessus de  $\mathcal{M}_{\bar{v}}^{\mathrm{reg}}(a)$ . Les fibres au-dessus des point  $x \in \mathcal{M}_{\bar{v}} - \mathcal{M}_{\bar{v}}^{\mathrm{reg}}$  sont non vides et de dimension supérieure ou égale à un. L'équidimensionalité de  $\mathcal{B}_{\bar{v}}(a)$  implique donc que les composantes irréductibles de  $\mathcal{M}_a - \mathcal{M}_a^{\mathrm{reg}}$  sont de dimension strictement plus petite que  $\dim(\mathcal{M}_a^{\mathrm{reg}})$ .  $\square$

**Corollaire 3.7.2.** — *Si  $\dim(\mathcal{M}_v(a)) = 0$ , alors l'ouvert dense  $\mathcal{M}_v^{\mathrm{reg}}(a)$  est  $\mathcal{M}_v(a)$  tout entier.*

Kazhdan et Lusztig ont aussi conjecturé une formule qui exprime la dimension ci-dessus en fonction du discriminant et d'un terme défectif relié à la monodromie qui a été démontrée plus tard par Bezrukavnikov dans [7]. Rappelons cette formule.

Gardons les notations fixées au début de ce chapitre. Soit  $a : \bar{X}_{\bar{v}} \rightarrow \mathfrak{c}$  un morphisme dont l'image n'est pas contenue dans le diviseur du discriminant  $\mathfrak{D}_G$ . En prenant l'image réciproque de  $\mathfrak{D}_G$ , on obtient un diviseur de Cartier effectif de  $\bar{X}_{\bar{v}}$  supporté par son point fermé. Son degré est un entier naturel que nous allons noter

$$d_{\bar{v}}(a) := \deg_{\bar{v}}(a^*\mathfrak{D}_G).$$

En prenant l'image réciproque du revêtement  $\pi : \mathfrak{t}^{\mathrm{rs}} \rightarrow \mathfrak{c}^{\mathrm{rs}}$  par le morphisme  $a : \bar{X}_{\bar{v}}^{\bullet} \rightarrow \mathfrak{c}^{\mathrm{rs}}$ , on obtient un  $W$ -torseur  $\pi_a$  sur  $\bar{X}_{\bar{v}}^{\bullet}$ . Rappelons qu'au-dessus de  $\bar{X}_{\bar{v}}$  la forme quasi-déployée se déploie canoniquement de sorte qu'après le changement de base à  $\bar{X}_{\bar{v}}$ , on a  $W = \mathbb{W}$ . En choisissant un point géométrique de ce toseur au-dessus du point géométrique  $\bar{\eta}_{\bar{v}}$  de  $\bar{X}_{\bar{v}}$ , on obtient un homomorphisme

$$(3.7.3) \quad \pi_a^{\bullet} : I_v \rightarrow \mathbb{W}$$

Puisque  $p$  ne divise pas l'ordre de  $\mathbb{W}$ ,  $\pi_a^\bullet$  se factorise par le quotient modéré  $I_v^{\text{tame}}$  de  $I_v$  de sorte que son image est un sous-groupe cyclique. Notons

$$(3.7.4) \quad c_{\bar{v}}(a) := \dim(\mathfrak{t}) - \dim(\mathfrak{t}^{\pi_a^\bullet(I_v)}).$$

L'énoncé suivant a été démontré dans [7] par Bezrukavnikov.

**Proposition 3.7.5.** — *On a les égalités*

$$\dim(\mathcal{M}_{\bar{v}}^{\text{reg}}(a)) = \dim(\mathcal{P}_{\bar{v}}(J_a)) = \frac{d_{\bar{v}}(a) - c_{\bar{v}}(a)}{2}.$$

Nous allons noter  $\delta_{\bar{v}}(a) = \dim(\mathcal{P}_{\bar{v}}(J_a))$  et l'appeler l'*invariant  $\delta$  local*.

**3.8. Modèle de Néron.** — La dimension de  $\mathcal{P}_{\bar{v}}(J_a)$  peut être calculée autrement à l'aide du modèle de Néron de  $J_a$ . En fait, le modèle de Néron nous permet d'analyser complètement la structure de  $\mathcal{P}_{\bar{v}}(J_a)$ . D'après Bosch, Lutkebohm et Raynaud [9], il existe un unique schéma en groupes lisse de type fini  $J_a^b$  sur  $\bar{X}_{\bar{v}}$  de même fibre générique que  $J_a$  et maximal pour cette propriété c'est-à-dire pour tout autre schéma en groupes lisse de type fini  $J'$  sur  $\bar{X}_{\bar{v}}$  de même fibre générique, il existe un homomorphisme canonique  $J' \rightarrow J_a^b$  qui induit l'identité sur les fibres génériques. En particulier, on a un homomorphisme canonique  $J_a \rightarrow J_a^b$ . Au niveau des points entiers, cet homomorphisme définit les inclusions

$$J_a(\bar{\mathcal{O}}_{\bar{v}}) \subset J_a^b(\bar{\mathcal{O}}_{\bar{v}}) \subset J_a(\bar{F}_{\bar{v}}).$$

où  $J_a^b(\bar{\mathcal{O}}_{\bar{v}})$  est le sous-groupe borné maximal de  $J_a(F_{\bar{v}})$ . On appellera  $J_a^b$  le modèle de Néron de  $J_a$ . Remarquons que dans la terminologie de [9],  $J_a^b$  sera appelé le modèle de Néron de type fini à distinguer avec leur modèle de Néron qui est seulement localement de type fini.

En remplaçant dans la définition 3.3 de  $\mathcal{P}_{\bar{v}}(J_a)$  le schéma en groupes  $J_a$  par son modèle de Néron  $J_a^b$ , on obtient un ind-schéma en groupes  $\mathcal{P}_{\bar{v}}(J_a^b)$  sur  $\bar{k}$ . L'homomorphisme de schémas en groupes  $J_a \rightarrow J_a^b$  induit un homomorphisme de ind-groupes

$$\mathcal{P}_{\bar{v}}(J_a) \rightarrow \mathcal{P}_{\bar{v}}(J_a^b)$$

qui induit un dévissage de  $\mathcal{P}_{\bar{v}}(J_a)$ .

**Lemme 3.8.1.** — *Le groupe  $\mathcal{P}_{\bar{v}}(J_a^b)$  est homéomorphe à un groupe abélien libre de type fini. L'homomorphisme  $p_{\bar{v}} : \mathcal{P}_{\bar{v}}(J_a) \rightarrow \mathcal{P}_{\bar{v}}(J_a^b)$  est surjectif. Le noyau  $\mathcal{R}_{\bar{v}}(a)$  de  $p_{\bar{v}}$  est un schéma en groupes affine de type fini sur  $\bar{k}$ .*

*Démonstration.* — Puisque  $J_a^b(\bar{\mathcal{O}}_{\bar{v}})$  est le sous-groupe borné maximal dans le tore  $J_a(\bar{F}_{\bar{v}})$ , le quotient  $J_a(\bar{F}_{\bar{v}})/J_a^b(\bar{\mathcal{O}}_{\bar{v}})$  est un groupe abélien libre de type fini. L'homomorphisme

$$\mathcal{P}_{\bar{v}}(J_a)(\bar{k}) = J_a(\bar{F}_{\bar{v}})/J_a(\bar{\mathcal{O}}_{\bar{v}}) \rightarrow J_a(\bar{F}_{\bar{v}})/J_a^b(\bar{\mathcal{O}}_{\bar{v}}) = \mathcal{P}_{\bar{v}}(J_a^b)(\bar{k})$$

est manifestement surjectif.

Pour un entier  $N$  assez grand,  $J_a(\mathcal{O}_{\bar{v}})$  contient le noyau de l'homomorphisme  $J_a^b(\bar{\mathcal{O}}_{\bar{v}}) \rightarrow J_a^b(\bar{\mathcal{O}}_{\bar{v}}/\varepsilon_{\bar{v}}^N \bar{\mathcal{O}}_{\bar{v}})$ . Il s'ensuit que  $\mathcal{R}_{\bar{v}}(a)$  est un quotient de la restriction à la Weil

$$\prod_{\text{Spec}(\bar{\mathcal{O}}_{\bar{v}}/\varepsilon_{\bar{v}}^N \bar{\mathcal{O}}_{\bar{v}})/\text{Spec}(\bar{k})} J_a^b \otimes_{\bar{\mathcal{O}}_{\bar{v}}} (\bar{\mathcal{O}}_{\bar{v}}/\varepsilon_{\bar{v}}^N \bar{\mathcal{O}}_{\bar{v}})$$

qui est un  $\bar{k}$ -groupe algébrique affine lisse de type fini. Le lemme s'en déduit.  $\square$

Le modèle de Néron peut être explicitement construit à l'aide de la normalisation du revêtement caméral. Notons  $\tilde{X}_{a,\bar{v}}$  l'image réciproque de  $\mathfrak{t} \rightarrow \mathfrak{c}$  par le morphisme  $a : \bar{X}_{\bar{v}} \rightarrow \mathfrak{c}$ . Considérons la normalisation  $\tilde{X}_{a,\bar{v}}^b$  de  $\tilde{X}_{a,\bar{v}}$  qui est un schéma fini et plat au-dessus de  $\bar{X}_{\bar{v}}$  muni d'une action de  $W$ . Puisque le corps résiduel de  $\bar{X}_{\bar{v}}$  est algébriquement clos,  $\tilde{X}_{a,\bar{v}}^b$  est un schéma semi-local complet régulier de dimension un.

**Proposition 3.8.2.** — *Soit  $\tilde{X}_{a,\bar{v}}^b = \text{Spec}(\tilde{\mathcal{O}}_{\bar{v}}^b)$  la normalisation de  $\tilde{X}_{a,\bar{v}}$ . Alors le modèle de Néron  $J_a^b$  de  $J_a$  est le groupe des points fixes sous l'action diagonale de  $W$  dans la restriction des scalaires de  $\tilde{X}_{a,\bar{v}}^b$  à  $\bar{X}_{\bar{v}}$  du tore  $T \times_{\bar{X}_{\bar{v}}} \tilde{X}_{a,\bar{v}}^b$*

$$J_a^b = \prod_{\tilde{X}_{a,\bar{v}}^b/\bar{X}_{\bar{v}}} (T \times_{\bar{X}_{\bar{v}}} \tilde{X}_{a,\bar{v}}^b)^W.$$

*Démonstration.* — Notons  $\pi_a^b$  le morphisme  $\tilde{X}_{a,\bar{v}}^b \rightarrow \bar{X}_{\bar{v}}$ . Comme dans le lemme 2.4.1, le schéma des points fixes sous l'action diagonale de  $W$  sur la restriction des scalaires à la Weil  $\prod_{\tilde{X}_{\bar{v}}^b/\bar{X}_{\bar{v}}} (T \times_{\bar{X}_{\bar{v}}} \tilde{X}_{\bar{v}}^b)$  est un schéma en groupes lisse de type fini sur  $\bar{X}_{\bar{v}}$ . Il sera plus commode de raisonner avec le faisceau  $(\pi_{a*}^b T)^W$  que représente la restriction à la Weil ci-dessus.

D'après la description galoisienne du centralisateur régulier 2.4, la restriction de  $\pi_a^{b*} J_a$  à  $\tilde{X}_{a,\bar{v}}^{b\bullet} = \tilde{X}_{a,\bar{v}}^b \times_{\bar{X}_{\bar{v}}} \bar{X}_{\bar{v}}^{\bullet}$  est canoniquement isomorphe au tore  $T \times_{\bar{X}_{\bar{v}}^{\bullet}} \tilde{X}_{a,\bar{v}}^{b\bullet}$ . Le modèle de Néron de  $T \times_{\bar{X}_{\bar{v}}^{\bullet}} \tilde{X}_{a,\bar{v}}^{b\bullet}$  étant le tore

$T \times_{\bar{X}_{\bar{v}}} \tilde{X}_{a,\bar{v}}^b$ , on a un homomorphisme canonique

$$\pi_a^{b*} J_a \longrightarrow T \times_{\bar{X}_{\bar{v}}} \tilde{X}_{a,\bar{v}}^b.$$

Par adjonction, on a un homomorphisme  $J_a \longrightarrow \pi_{a*}^b T$ . En fibre générique, cet homomorphisme se factorise par le sous-tore des points fixes sous l'action diagonale  $W$  dans  $T \times_{\bar{X}_{\bar{v}}} \tilde{X}_{a,\bar{v}}^{b\bullet}$ . On en déduit un homomorphisme  $J_a \longrightarrow (\pi_{a*}^b T)^W$ . Le même raisonnement s'applique en fait à n'importe quel schéma en groupes lisse de type fini ayant la même fibre générique que  $J_a$ . Le lemme en résulte donc.  $\square$

**Corollaire 3.8.3.** — *On a la formule*

$$\dim(\mathcal{P}_{\bar{v}}(J_a)) = \dim_{\bar{k}}(\mathfrak{t} \otimes_{\bar{\mathcal{O}}_{\bar{v}}} \tilde{\mathcal{O}}_{\bar{v}}^b / \tilde{\mathcal{O}}_{\bar{v}})^W.$$

On obtient ainsi une autre formule pour l'invariant  $\delta_{\bar{v}}(a)$ . Notons au passage que l'entier  $c_{\bar{v}}(a)$  de 3.7.4 est égale à la chute du rang torique du modèle de Néron  $J_a^b$  c'est-à-dire la différence entre  $r$  et le rang torique de la fibre spéciale de  $J_a^b$ .

**3.9. Composantes connexes.** — Dans ce paragraphe, nous allons décrire le groupe des composantes connexes  $\pi_0(\mathcal{P}_{\bar{v}}(a))$ .

Soit  $a : \bar{X}_{\bar{v}} \rightarrow \mathfrak{c}$  un morphisme dont l'image n'est pas contenue dans le diviseur discriminant. On a alors un schéma en groupes lisse  $J_a$  sur  $\bar{X}_{\bar{v}}$  dont la fibre générique est un tore. Soit  $J_a^0$  le sous-schéma en groupes ouvert des composantes neutres de  $J_a$ . Au-dessus de  $\bar{F}_{\bar{v}}$ ,  $J_a$  est un tore de sorte que l'homomorphisme  $J_a^0 \rightarrow J_a$  induit un isomorphisme au-dessus de  $\bar{F}_{\bar{v}}$ . En tant qu'homomorphisme de faisceaux en groupes abéliens, c'est un homomorphisme injectif dont le conoyau est supporté par la fibre spéciale de  $\bar{X}_{\bar{v}}$  avec comme fibre

$$\pi_0(J_{a,\bar{v}}) = J_a(\bar{\mathcal{O}}_{\bar{v}}) / J_a^0(\bar{\mathcal{O}}_{\bar{v}}).$$

Les inclusions  $J_a^0(\bar{\mathcal{O}}_{\bar{v}}) \subset J_a(\bar{\mathcal{O}}_{\bar{v}}) \subset J_a(\bar{F}_{\bar{v}})$  induisent une suite exacte

$$1 \rightarrow \pi_0(J_{a,v}) \rightarrow J_a(\bar{F}_{\bar{v}}) / J_a^0(\bar{\mathcal{O}}_{\bar{v}}) \rightarrow J_a(\bar{F}_{\bar{v}}) / J_a(\bar{\mathcal{O}}_{\bar{v}}) \rightarrow 1.$$

On a donc un homomorphisme surjectif

$$(3.9.1) \quad \mathcal{P}_{\bar{v}}(J_a^0) \rightarrow \mathcal{P}_{\bar{v}}(J_a)$$

dont le noyau est le groupe fini  $\pi_0(J_{a,v})$ . On en déduit une suite exacte

$$\pi_0(J_{a,v}) \rightarrow \pi_0(\mathcal{P}_{\bar{v}}(J_a^0)) \rightarrow \pi_0(\mathcal{P}_{\bar{v}}(J_a)) \rightarrow 1.$$

Pour déterminer  $\pi_0(\mathcal{P}_{\bar{v}}(J_a))$ , il suffit donc de décrire le groupe  $\pi_0(\mathcal{P}_{\bar{v}}(J_a^0))$  et l'image de la flèche  $\pi_0(J_{a,v}) \rightarrow \pi_0(\mathcal{P}_{\bar{v}}(J_a^0))$ .

Comme dans le cas de la dualité de Tate-Nakayama, le groupe des composantes connexes  $\pi_0(P_a)$  s'exprime plus aisément à l'aide de la dualité. Pour tout groupe abélien de type fini  $\Lambda$ , nous notons

$$\Lambda^* = \text{Spec}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell[\Lambda])$$

le  $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -groupe diagonalisable de groupe des caractères  $\Lambda$  et inversement pour tout  $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -groupe diagonalisable  $A$ , nous notons  $A^*$  son groupe des caractères qui est un groupe abélien de type fini.

Pour écrire des formules explicites, fixons une trivialisation de  $\rho_{\text{Out}}$  au-dessus de  $\bar{X}_v$ . Ceci permet en particulier d'identifier  $W$  et  $\mathbb{W}$ . Soit  $\tilde{X}_{a,\bar{v}}^\bullet$  l'image réciproque du revêtement fini étale  $\pi : \mathfrak{t}^{\text{rs}} \rightarrow \mathfrak{c}^{\text{rs}}$  par le morphisme  $a : \bar{X}_{\bar{v}} \rightarrow \mathfrak{c}$ . En choisissant un point géométrique de  $\tilde{X}_{a,\bar{v}}$  au-dessus du point géométrique  $\bar{\eta}_v$  de  $\bar{X}_{\bar{v}}$ , on obtient un homomorphisme  $\pi_a^\bullet : I_v \rightarrow \mathbb{W}$ .

**Proposition 3.9.2.** — *Avec le choix d'un point géométrique de  $\tilde{X}_{a,\bar{v}}$  au-dessus du point géométrique  $\bar{\eta}_v$  de  $\bar{X}_{\bar{v}}$ , on a un isomorphisme canonique entre groupes diagonalisables*

$$\pi_0(\mathcal{P}_{\bar{v}}(J_a^0))^* = \hat{\mathbb{T}}^{\pi_a^\bullet(I_v)}.$$

De même, on a un isomorphisme

$$\pi_0(\mathcal{P}_{\bar{v}}(J_a))^* = \hat{\mathbb{T}}(\pi_a^\bullet(I_v))$$

où  $\hat{\mathbb{T}}(\pi_a^\bullet(I_v))$  est le sous-groupe de  $\hat{\mathbb{T}}^{\pi_a^\bullet(I_v)}$  formé des éléments  $\kappa \in \hat{\mathbb{T}}$  tel que  $\pi_0(\mathcal{P}_{\bar{v}}(J_a^0))$  est contenu dans le groupe de Weyl de la composante neutre  $\hat{\mathbb{H}}$  du centralisateur de  $\kappa$  dans  $\hat{\mathbb{G}}$ .

*Démonstration.* — Considérons le schéma en groupes des composantes neutres  $J_a^{b,0}$  du modèle de Néron  $J_a^b$ . Dans la terminologie de [9], c'est le modèle de Néron connexe. Puisque  $J_a^0$  a des fibres connexes, l'homomorphisme  $J_a^0 \rightarrow J_a^b$  se factorise par  $J_a^{b,0}$ .

**Lemme 3.9.3.** — *L'homomorphisme  $\mathcal{P}_{\bar{v}}(J_a^0) \rightarrow \mathcal{P}_{\bar{v}}(J_a^{b,0})$  induit un isomorphisme de  $\pi_0(\mathcal{P}_{\bar{v}}(J_a^0))$  sur  $J_a(\bar{F}_{\bar{v}})/J_a^{b,0}(\bar{\mathcal{O}}_{\bar{v}})$ .*

*Démonstration.* — Comme  $J_a^0$  et  $J_a^{b,0}$  a des fibres connexes, l'homomorphisme  $\mathcal{P}_{\bar{v}}(J_a^0) \rightarrow \mathcal{P}_{\bar{v}}(J_a^{b,0})$  induit un isomorphisme sur les groupes des composantes connexes. Topologiquement,  $\mathcal{P}_{\bar{v}}(J_a^{b,0})$  est le groupe discret  $J_a(\bar{F}_{\bar{v}})/J_a^{b,0}(\bar{\mathcal{O}}_{\bar{v}})$ .  $\square$

Pour tout tore  $A$  sur  $\bar{F}_{\bar{v}}$ , on va considérer le modèle de Néron connexe  $A^{b,0}$  de  $A$  sur  $\bar{\mathcal{O}}_{\bar{v}}$  et le groupe abélien de type fini  $A(\bar{F}_{\bar{v}})/A^{b,0}(\bar{\mathcal{O}}_{\bar{v}})$ . On peut vérifier cf. [60] que le foncteur  $A \mapsto A(\bar{F}_{\bar{v}})/A^{b,0}(\bar{\mathcal{O}}_{\bar{v}})$  vérifie les axiomes du lemme [39, 2.2]. Suivant Kottwitz, on obtient une formule générale pour  $A(\bar{F}_{\bar{v}})/A^{b,0}(\bar{\mathcal{O}}_{\bar{v}})$  et en particulier, on obtient le lemme suivant.

**Lemme 3.9.4.** — *Avec les notations ci-dessus, on a un isomorphisme  $J_a(\bar{F}_{\bar{v}})/J_a^{b,0}(\bar{\mathcal{O}}_{\bar{v}}) = (\mathbb{X}_*)_{\pi_a^\bullet(I_v)}$ .*

La conjonction des deux lemmes précédents donne l'isomorphisme

$$\pi_0(\mathcal{P}_{\bar{v}}(J_a^0)) = (\mathbb{X}_*)_{\pi_a^\bullet(I_v)}$$

qui induit par dualité la première assertion du théorème

$$\pi_0(\mathcal{P}_{\bar{v}}(J_a^0))^* = \hat{\mathbb{T}}^{\pi_a^\bullet(I_v)}.$$

La démonstration de la deuxième assertion utilise l'astuce des  $z$ -extensions. Suivant [41, 7.5], il existe une suite exacte

$$1 \rightarrow G \rightarrow G_1 \rightarrow C \rightarrow 1$$

de schéma en groupes réductifs au-dessus de  $X$  qui se déduit par torsion extérieure d'une suite exacte de groupes réductifs déployés

$$1 \rightarrow \mathbb{G} \rightarrow \mathbb{G}_1 \rightarrow \mathbb{C} \rightarrow 1$$

où  $\mathbb{C}$  est un tore et où  $\mathbb{G}_1$  est un groupe réductif de centre connexe. Son groupe dual  $\hat{\mathbb{G}}_1$  a un groupe dérivé simplement connexe. Il existe un tore maximal  $\mathbb{T}_1$  de  $\mathbb{G}_1$  tel qu'on a une suite exacte

$$1 \rightarrow \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}_1 \rightarrow \mathbb{C} \rightarrow 1.$$

En remplaçant  $G$  par  $G_1$ , on va noter  $\mathfrak{c}_1$  à la place de  $\mathfrak{c}$ . L'homomorphisme  $G \rightarrow G_1$  induit un morphisme  $\alpha : \mathfrak{c} \rightarrow \mathfrak{c}_1$ . Au-dessus de  $\mathfrak{c}_1$ , on a le schéma en groupes des centralisateurs réguliers  $J_1$  qui est un schéma en groupes lisse à fibres connexes puisque le centre de  $G_1$  est connexe cf. 2.3.1. On a une suite exacte de schémas en groupes lisse commutatif

$$1 \rightarrow J \rightarrow \alpha^* J_1 \rightarrow C \rightarrow 1.$$

Soit  $a : \bar{X}_{\bar{v}} \rightarrow \mathfrak{c}$  tel que  $a|_{\bar{X}_{\bar{v}}^\bullet}$  est à l'image dans  $\mathfrak{c}^{\text{rs}}$ . Notons encore  $\alpha(a) : \bar{X}_{\bar{v}} \rightarrow \mathfrak{c}_1$  le morphisme obtenu en composant  $a$  avec  $\alpha$ . Sur  $\bar{X}_{\bar{v}}$ , on a une suite exacte

$$1 \rightarrow J_a \rightarrow J_{1,\alpha(a)} \rightarrow C \rightarrow 1$$

avec  $J_a = \alpha^* J$  et  $(J_1)_{\alpha(a)} = \alpha(a)^* J_1$ .



**Proposition 3.9.5.** — *L'homomorphisme*

$$\pi_0(\mathcal{P}_{\bar{v}}(J_a)) \rightarrow \pi_0(\mathcal{P}_{\bar{v}}(J_{1,\alpha(a)}))$$

*est injectif.*

*Démonstration.* — Puisque  $J \rightarrow \alpha^* J_1$  est une immersion fermée, en particulier propre, on a  $J_a(\bar{\mathcal{O}}_{\bar{v}}) = J_a(\bar{F}_{\bar{v}}) \cap (J_1)_{\alpha(a)}(\bar{\mathcal{O}}_{\bar{v}})$ . Il s'ensuit que l'homomorphisme

$$j_{\alpha(a)} : J_a(\bar{F}_{\bar{v}})/J_a(\bar{\mathcal{O}}_{\bar{v}}) \rightarrow J_{1,\alpha(a)}(\bar{F}_{\bar{v}})/J_{1,\alpha(a)}(\bar{\mathcal{O}}_{\bar{v}})$$

est injectif. Puisque  $C$  est un tore sur  $\bar{X}_{\bar{v}}$ ,  $C(\bar{F}_{\bar{v}})/C(\bar{\mathcal{O}}_{\bar{v}})$  est un groupe abélien libre de type fini et discret. La composante neutre de

$$J_{1,\alpha(a)}(\bar{F}_{\bar{v}})/J_{1,\alpha(a)}(\bar{\mathcal{O}}_{\bar{v}})$$

appartient donc dans l'image de  $j_{\alpha(a)}$ . Par conséquent,  $j_{\alpha(a)}$  induit un isomorphisme entre la composante neutre de  $J_a(\bar{F}_{\bar{v}})/J_a(\bar{\mathcal{O}}_{\bar{v}})$  et celle de  $J_{1,\alpha(a)}(\bar{F}_{\bar{v}})/J_{1,\alpha(a)}(\bar{\mathcal{O}}_{\bar{v}})$ . Il en résulte que l'homomorphisme  $\pi_0(\mathcal{P}_{\bar{v}}(J_a)) \rightarrow \pi_0(\mathcal{P}_{\bar{v}}((J_1)_{\alpha(a)}))$  est injectif.  $\square$

**Corollaire 3.9.6.** — *Il existe un isomorphe canonique entre  $\pi_0(\mathcal{P}_{\bar{v}}(J_a))$  et l'image de l'homomorphisme*

$$\pi_0(\mathcal{P}_{\bar{v}}(J_a^0)) \rightarrow \pi_0(\mathcal{P}_{\bar{v}}(J_{1,\alpha(a)})).$$

*Démonstration.* — En plus de la proposition précédente, il suffit d'invoquer la surjectivité de  $\pi_0(\mathcal{P}_{\bar{v}}(J_a^0)) \rightarrow \pi_0(\mathcal{P}_{\bar{v}}(J_a))$ .  $\square$

En choisissant un point géométrique de  $\tilde{X}_{a,\bar{v}}^\bullet$ , on peut identifier le groupe  $\pi_0(\mathcal{P}_{\bar{v}}(J_a))$  à l'image de l'homomorphisme

$$(\mathbb{X}_*)_{I_v} \rightarrow (\mathbb{X}_{1,*})_{I_v}$$

où  $\mathbb{X}_{1,*} = \text{Hom}(\mathbb{G}_m, \mathbb{T}_1)$ . Notons que l'égalité  $\pi_0(\mathcal{P}_{\bar{v}}(J_{1,\alpha(a)})) = (\mathbb{X}_{1,*})_{I_v}$  résulte de la connexité des fibres de  $J_1$  et de 3.9.4. D'autre part, il existe un isomorphisme entre le sous-groupe  $\text{Spec}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell[\pi_0(\mathcal{P}_{\bar{v}}(J_a))])$  de  $\hat{\mathbb{T}}^{I_v}$  et l'image de l'homomorphisme

$$\hat{\mathbb{T}}_1^{I_v} = \text{Spec}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell[(\mathbb{X}_{1,*})_{I_v}]) \rightarrow \text{Spec}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell[(\mathbb{X}_*)_{I_v}]) = \hat{\mathbb{T}}^{I_v}.$$

Il reste maintenant à démontrer que l'image de  $\hat{\mathbb{T}}_1^{I_v}$  dans  $\hat{\mathbb{T}}^{I_v}$  est bien le sous-groupe des éléments  $\kappa \in \hat{\mathbb{T}}$  tels que  $\pi_a^\bullet(I_v)$  soit contenu dans le groupe de Weyl de la composante neutre  $\hat{\mathbb{H}}$  du centralisateur  $\hat{\mathbb{G}}_\kappa$ . Pour tout  $\kappa \in \hat{\mathbb{T}}$ , pour tout  $\kappa_1 \in \hat{\mathbb{T}}_1$  d'image  $\kappa$ , le centralisateur  $\hat{\mathbb{H}}_1$  de  $\kappa_1$  dans  $\hat{\mathbb{G}}_1$  est connexe et son image dans  $\hat{\mathbb{G}}$  est  $\hat{\mathbb{H}}$ . En effet,  $\hat{\mathbb{G}}_1$  a un groupe

dérivé simplement connexe de sorte que le centralisateur d'un élément semi-simple de  $\hat{\mathbb{G}}_1$  est connexe. On en déduit ce qu'on voulait.  $\square$

On a une autre description de  $\pi_0(\mathcal{P}_{\bar{v}}(J_a))$  plus explicite mais finalement moins commode à l'usage.

**Proposition 3.9.7.** — *Avec le choix d'un point géométrique de  $\tilde{X}_{a,\bar{v}}$  au-dessus du point géométrique  $\bar{\eta}_v$  de  $\bar{X}_{\bar{v}}$ , on a un isomorphisme entre  $\pi_0(\mathcal{P}_{\bar{v}}(J_a))$  est le conoyau du composé de deux flèches*

$$\pi_0(Z_{\mathbb{G}}) \rightarrow \pi_0(\mathbb{T}^{\pi_a^\bullet(I_v)}) \rightarrow (\mathbb{X}_*)_{\pi_a^\bullet(I_v)}$$

dont la première se déduit de l'homomorphisme évident  $Z_{\mathbb{G}} \rightarrow \mathbb{T}^{\pi_a^\bullet(I_v)}$  et dont la seconde est un isomorphisme canonique de  $\pi_0(\mathbb{T}^{\pi_a^\bullet(I_v)})$  sur la partie de torsion de  $(\mathbb{X}_*)_{\pi_a^\bullet(I_v)}$ .

*Démonstration.* — On sait que  $\pi_0(\mathcal{P}_{\bar{v}}(J_a))$  est le conoyau de l'homomorphisme  $\pi_0(J_{a,v}) \rightarrow \pi_0(\mathcal{P}_{\bar{v}}(J_a^0))$ . D'après 2.3.2, on sait que  $\pi_0(J_{a,v})$  et  $\pi_0(Z_{\mathbb{G}})$  ont la même image dans  $(\mathbb{X}_*)_{\pi_a^\bullet(I_v)}$ .  $\square$

**3.10. Densité de l'orbite régulière.** — On reporte à la section 4.14 pour une esquisse de la démonstration de la proposition suivante. Elle se déduira de son analogue global qui sera démontrée de manière détaillée. Seul analogue global sera utilisé dans la suite de l'article.

**Proposition 3.10.1.** — *L'ouvert  $\mathcal{M}_v^{\text{reg}}(a)$  est dense dans  $\mathcal{M}_v(a)$ .*

Notons qu'on sait déjà que le fermé complémentaire  $\mathcal{M}_v(a) - \mathcal{M}_v^{\text{reg}}(a)$  est de dimension strictement plus petite que  $\dim(\mathcal{M}_v^{\text{reg}}(a))$  cf. 3.7.1.

**Corollaire 3.10.2.** — *L'ensemble des composantes irréductibles de la fibre de Springer affine  $\mathcal{M}_v(a)$  est en bijection canonique avec le groupe des composantes connexes du groupe  $\mathcal{P}_v(J_a)$ .*

*Démonstration.* — On a en effet un isomorphisme  $\mathcal{P}_v(J_a) \rightarrow \mathcal{M}_v^{\text{reg}}(a)$  en faisant agir  $\mathcal{P}_v(J_a)$  sur le point de Kostant.  $\square$

**3.11. Le cas d'un groupe endoscopique.** — Soit  $H$  un groupe endoscopique de  $G$  au sens de 1.8. Soit  $a_H \in \mathfrak{c}_H(\bar{\mathcal{O}}_{\bar{v}})$  d'image  $a \in \mathfrak{c}(\bar{\mathcal{O}}_{\bar{v}}) \cap \mathfrak{c}^{\text{rs}}(\bar{F}_{\bar{v}})$ . Il n'y a pas de relation directe entre les fibres de Springer affines  $\mathcal{M}_{H,v}(a_H)$  et  $\mathcal{M}_v(a)$ . Il y a pourtant une relation évidente entre leurs groupes de symétries.

On alors deux  $\bar{X}_{\bar{v}}$ -schémas en groupes  $J_a = a^*J$  et  $J_{H,a_H} = a_H^*J_H$  qui sont reliés par un homomorphisme

$$\mu_{a_H} : J_a \rightarrow J_{H,a_H}$$

qui est un isomorphisme au-dessus du disque pointé  $\bar{X}_{\bar{v}}^\bullet$ . Cet homomorphisme est construit en prenant l'image réciproque par  $a_H$  de l'homomorphisme  $\mu$  construit dans 2.5.1.

Soit  $\mathcal{R}_{H,\bar{v}}^G(a_H)$  le groupe algébrique affine sur  $\bar{k}$  dont le groupe des  $\bar{k}$ -points est

$$\mathcal{R}_{\bar{v}}(a_H)(\bar{k}) = J_{H,a_H}(\bar{\mathcal{O}}_{\bar{v}})/J_a(\bar{\mathcal{O}}_{\bar{v}}).$$

On a alors la suite exacte

$$(3.11.1) \quad 1 \rightarrow \mathcal{R}_{H,\bar{v}}^G(a_H) \rightarrow \mathcal{P}_{\bar{v}}(J_a) \rightarrow \mathcal{P}_{\bar{v}}(J_{H,a_H}) \rightarrow 1.$$

**Lemme 3.11.2.** — On a

$$\dim(\mathcal{R}_{H,\bar{v}}^G(a_H)) = r_{H,\bar{v}}^G(a_H)$$

où  $r_{H,\bar{v}}^G(a_H) = \deg_{\bar{v}}(a_H^* \mathfrak{R}_G^H)$ , le diviseur  $\mathfrak{R}_G^H$  de  $\mathfrak{c}_H$  étant défini dans 1.10.3.

*Démonstration.* — En vertu de la suite exacte 3.11.1, on a

$$\dim(\mathcal{R}_{H,\bar{v}}^G(a_H)) = \dim(\mathcal{P}_{\bar{v}}(J_a)) - \dim(\mathcal{P}_{\bar{v}}(J_{H,a_H})).$$

Comme l'homomorphisme  $J_{H,a_H} \rightarrow J_a$  est un isomorphisme dans la fibre générique, on l'égalité

$$c_{\bar{v}}(a_H) = c_{\bar{v}}(a)$$

où  $c_{\bar{v}}(a_H)$  et  $c_{\bar{v}}(a)$  sont les invariants galoisiens qui apparaissent dans la formule de dimension de Bezrukavnikov cf. 3.7.5. En appliquant cette formule à  $a$  et  $a_H$ , on trouve

$$\dim(\mathcal{R}_{H,\bar{v}}^G(a_H)) = \deg_{\bar{v}}(a^* \mathfrak{D}_G) - \deg_{\bar{v}}(a_H^* \mathfrak{D}_H).$$

Il suffit maintenant d'évoquer 1.10.3 pour conclure.  $\square$

Soit maintenant  $a_H \in \mathfrak{c}_H(\mathcal{O}_v)$  d'image  $a \in \mathfrak{c}(\mathcal{O}_v) \cap \mathfrak{c}^{\text{rs}}(F_v)$ . Avec la même définition que ci-dessus, on obtient un groupe  $\mathcal{R}_v(a_H)$  défini sur  $k$ . On a la formule

$$\mathcal{R}_{H,v}^G(a_H) \otimes_k \bar{k} = \prod_{\bar{v}: k_v \rightarrow \bar{k}} \mathcal{R}_{\bar{v}}(a)$$

qui implique la formule de dimension

$$\dim \mathcal{R}_{H,v}^G(a_H) = \deg(k_v/k) \deg_v(a_H^* \mathfrak{R}_G^H).$$

En identifiant  $\mathcal{P}_v(J_a)$  avec l'ouvert  $\mathcal{M}_v^{\text{reg}}(a)$  de  $\mathcal{M}_v(a)$  et en identifiant  $\mathcal{P}_v(J_{H,a_H})$  avec l'ouvert  $\mathcal{M}_{H,v}(a_H)$ , puis en prenant l'adhérence du graphe de l'homomorphisme  $\mu_{a_H}$  dans  $\mathcal{M}_v(a) \times \mathcal{M}_v(a_H)$ , on obtient une correspondance intéressante entre ces deux fibres de Springer affines. Nous n'allons pas utiliser cette correspondance dans ce travail.

#### 4. Fibration de Hitchin

Dans son article mémorable [32], Hitchin a observé que le fibré cotangent de l'espace de module des fibrés stables sur une courbe forme un système hamiltonien complètement intégrable. Pour cela, il construit explicitement une famille de fonctions commutantes pour le crochet de Poisson en nombre égal à la moitié de la dimension de ce cotangent. Ces fonctions définissent un morphisme de ce cotangent vers un espace affine dont la fibre générique est essentiellement une variété abélienne. Ce morphisme particulièrement joli est souvent appelé la fibration de Hitchin.

Nous adopterons un point de vue différent en considérant les fibres de la fibration de Hitchin comme l'analogue global des fibres de Springer affines. En particulier, nous remplaçons le fibré canonique de la courbe par un fibré inversible de degré très grand. En faisant ainsi, nous perdons la forme symplectique tout en gardant une fibration ayant la même allure que la fibration originale de Hitchin.

Comme nous avons observé dans [55], le comptage des points dans un corps fini de la fibration de Hitchin généralisée dans ce sens donne formellement le côté géométrique de la formule des traces pour l'algèbre de Lie. Ceci continue à nous servir de guide dans ce chapitre pour étudier les propriétés géométriques de la fibration de Hitchin. Le comptage de points sera passé en revue dans le chapitre 8.

Notre outil favori pour explorer la géométrie de la fibration de Hitchin  $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{A}$  et un champ de Picard  $\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{A}$  agissant sur  $\mathcal{M}$ . Cette action est fondée sur la construction du centralisateur régulier 2. On démontre en particulier que qu'il existe un ouvert  $\mathcal{M}^{\text{reg}}$  de  $\mathcal{M}$  cf. 4.3.3 sur lequel  $\mathcal{P}$  agit simplement transitivement et qui est dense dans chaque fibre  $\mathcal{M}_a$  cf. 4.14.1. On peut analyser la structure de  $\mathcal{P}_a$  en détails grâce à la courbe camérale et à la théorie du modèle de Néron. Ceci permet en particulier de définir un ouvert  $\mathcal{A}^\diamond$  au-dessus duquel  $\mathcal{M}$  est essentiellement un schéma abélien.

On fera aussi certains calculs utiles pour la suite comme le calcul des dimension 4.4, celui du groupe des composante connexes de  $\mathcal{P}_a$  cf. 4.10 et celui du groupe des automorphismes des fibrés de Higgs cf. 4.11.

Le point clé de ce chapitre est la formule de produit 4.13.1 qui établit la relation entre la fibre de Hitchin et les fibres de Springer affine. Cette formule a été démontrée dans [55]. Cette formule de produit joue un rôle crucial dans le chapitre sur le comptage 8 et en fait elle est également en filigrane dans la démonstration du théorème du support dans le chapitre 7.

On établit enfin un lien entre la fibration de Hitchin de  $G$  et celle d'un groupe endoscopique. Il existe un morphisme canonique  $\nu : \mathcal{A}_H \rightarrow \mathcal{A}$  et si  $a_H \mapsto a$ , on a un homomorphisme canonique  $\mu : \mathcal{P}_a \rightarrow \mathcal{P}_{H,a_H}$ . En revanche, il n'y a pas de relation directe entre les fibres de Hitchin  $\mathcal{M}_a$  et  $\mathcal{M}_{H,a_H}$  mais une correspondance qui se déduit de  $\mu$ . On utilisera pas cette correspondance dans la suite de l'article mais il vaut probablement le coup de l'exploiter davantage.

Voici les notations qui seront utilisées dans ce chapitre. On fixe une courbe  $X$  propre lisse et géométriquement connexe de genre  $g$  sur un corps fini  $k$ . Soit  $\bar{k}$  une clôture algébrique de  $k$ . On note  $\bar{X} = X \otimes_k \bar{k}$ .

On note  $F$  le corps des fonctions rationnelles sur  $X$ . Soit  $|X|$  l'ensemble des points fermés de  $X$ . Chaque élément  $v \in |X|$  définit une valuation  $v : F^\times \rightarrow \mathbb{Z}$ . Notons  $F_v$  la complétion de  $F$  par rapport à cette valuation,  $\mathcal{O}_v$  son anneau des entiers et  $k_v$  son corps résiduel. On note  $X_v = \text{Spec}(\mathcal{O}_v)$  le disque formel en  $v$  et  $X_v^\bullet = \text{Spec}(F_v)$  le disque formel pointé.

Soit  $\mathbb{G}$  un groupe de Chevalley avec un groupe de Weyl  $\mathbb{W}$  dont l'ordre n'est pas divisible par la caractéristique de  $k$ . Soit  $G$  un  $X$ -schéma en groupes réductif forme quasi-déployée de  $\mathbb{G}$  définie par un  $\text{Out}(\mathbb{G})$ -torseur  $\rho_G$  sur  $X$ .  $G$  est alors muni d'un épinglage  $(T, B, \mathbf{x}_+)$ . Reprenons la suite des notations de 1.3. En particulier, on a un  $X$ -schéma des polynômes caractéristique  $\mathfrak{c}$ , le morphisme de Chevalley  $\chi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{c}$  où  $\mathfrak{g} = \text{Lie}(G)$  et un morphisme fini plat  $\pi : \mathfrak{t} \rightarrow \mathfrak{c}$  qui au-dessus de l'ouvert  $\mathfrak{c}^{\text{rs}}$  est un toseur sous le schéma en groupes fini étale  $W$  obtenu en tordant  $\mathbb{W}$  par  $\rho_G$ .

Nous fixons un fibré inversible  $D$  sur  $X$  qui est le carré  $D = D'^{\otimes 2}$  d'un autre fibré inversible  $D'$ . De règle générale, nous supposons que le degré de  $D$  sera plus grand que  $2g$  où  $g$  est le genre de  $X$  ce qui est contraire à [32] où  $D$  est le fibré canonique. Nous indiquerons néanmoins les endroits où cette hypothèse est vraiment nécessaire.

Notons que  $\mathbb{G}_m$  agit sur  $\mathfrak{g}$  et  $\mathfrak{t}$  par homothétie, et agit sur  $\mathfrak{c}$  de façon compatibles. On notera  $\mathfrak{g}_D$ ,  $\mathfrak{t}_D$  et  $\mathfrak{c}_D$  les objets tordus par le  $\mathbb{G}_m$ -torseur attaché au fibré inversible  $D$ .

**4.1. Rappels sur  $\text{Bun}_G$ .** — Nous considérons le champ  $\text{Bun}_G$  qui associe à tout  $k$ -schéma  $S$  le groupoïde des  $G$ -torseurs sur  $X \times S$ . Le champ  $\text{Bun}_G$  est un champ algébrique au sens d'Artin [49]. Le groupoïde des  $k$ -points de  $\text{Bun}_G$  peut s'exprimer comme une réunion disjointe des doubles quotients

$$\text{Bun}_G(k) = \bigsqcup_{\xi \in \ker^1(F, G)} [G^\xi(F) \backslash \prod_{v \in |X|}^{\check{}} G(F_v)/G(\mathcal{O}_v)]$$

sur l'ensemble  $\ker^1(F, G)$  des  $G$ -torseurs sur  $F$  qui sont localement triviaux. Ici,  $G^\xi$  désigne la forme intérieure forte de  $G$  sur  $F$  donnée par la classe  $\xi \in \ker^1(F, G)$  et le produit  $\prod$  désigne un produit restreint.

Pour tout  $v \in |X|$ , on dispose comme dans 3.1 de la grassmannienne affine  $\mathcal{G}_v$  et d'un morphisme

$$\zeta : \mathcal{G}_v \longrightarrow \text{Bun}_G$$

qui consiste à recoller le  $G$ -torseur sur  $X_v \hat{\times} S$  muni d'une trivialisation sur  $X_v^\bullet \hat{\times} S$ , avec le  $G$ -torseur trivial sur  $(X - v) \times S$ . L'existence de ce recollement formel est un résultat de Beauville et Laszlo [4]. Au niveau des  $k$ -points, ce morphisme est le foncteur évident

$$G(F_v)/G(\mathcal{O}_v) \longrightarrow [G(F) \backslash \prod_{v \in |X|}^{\check{}} G(F_v)/G(\mathcal{O}_v)]$$

qui envoie  $g_v \in G(F_v)/G(\mathcal{O}_v)$  sur l'uplet constitué de  $g_v$  et des éléments neutres de  $G(F_{v'})/G(\mathcal{O}_{v'})$  pour toutes les places  $v' \neq v$ .

**4.2. Construction de la fibration.** — Rappelons la définition de l'espace de module de Hitchin.

**Définition 4.2.1.** — *L'espace total de Hitchin est le groupoïde fibré  $\mathcal{M}$  qui associe à tout  $k$ -schéma  $S$  le groupoïde  $\mathcal{M}(S)$  des couples  $(E, \phi)$  constitué d'un  $G$ -torseur  $E$  sur  $X \times S$  et d'une section*

$$\phi \in H^0(X \times S, \text{ad}(E) \otimes_{\mathcal{O}_X} D)$$

où  $\text{ad}(E)$  est le fibré en algèbres de Lie obtenu en tordant  $\mathfrak{g}$  muni de l'action adjointe par le  $G$ -torseur  $E$ .

**4.2.2.** — Il revient au même de dire que  $\mathcal{M}(S)$  est le groupoïde des morphismes  $h_{E,\phi}$  qui s'insèrent dans le diagramme commutatif :

$$X \times S \rightarrow [\mathfrak{g}_D/G].$$

Ce champ est un fibré vectoriel au-dessus du champ algébrique  $\text{Bun}_G$  classifiant les  $G$ -torseurs au-dessus de  $X$  si bien qu'il est lui-même un champ algébrique.

**4.2.3.** — Le morphisme caractéristique de Chevalley  $\chi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{c}$  induit un morphisme

$$[\chi] : [\mathfrak{g}_D/G] \rightarrow \mathfrak{c}_D.$$

On obtient un morphisme

$$f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{A}$$

où pour tout  $k$ -schéma  $S$ ,  $\mathcal{A}(S)$  est le groupoïde des morphismes  $a$  qui s'insèrent dans le diagramme commutatif :

$$a : X \times S \rightarrow \mathfrak{c}_D.$$

Il revient au même de dire que  $\mathcal{A}$  est l'ensemble des sections du fibré vectoriel  $\mathfrak{c}_D$  au-dessus de  $X$ . Il s'ensuit que  $\mathcal{A}$  est un  $k$ -espace vectoriel de dimension finie.

**4.2.4.** — Étant donnée une racine carré  $D'$  de  $D$ , on obtient une section  $\epsilon_{D'} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{M}$  du morphisme  $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{A}$  en utilisant 2.2.5. Cette section est essentiellement la même que les sections qu'a construites Hitchin de façon plus explicite dans le cas des groupes classiques. On l'appellera la section de Kostant-Hitchin.

**4.3. Symétries d'une fibre de Hitchin.** — Comme pour les fibres de Springer affines, la construction des symétries naturelles d'une fibre de Hitchin est fondée sur le lemme 2.1.1, voir [55].

**4.3.1.** — Pour tout  $S$ -point  $a$  de  $\mathcal{A}$ , on a un morphisme  $h_a : X \times S \rightarrow [\mathfrak{c}/\mathbb{G}_m]$ . On note  $J_a = h_a^* J$  l'image réciproque de  $J$  sur  $[\mathfrak{c}/\mathbb{G}_m]$  et on considère le groupoïde de Picard  $\mathcal{P}_a(S)$  des  $J_a$ -torseurs au-dessus de  $X \times S$ . Quand  $a$  varie, cette construction définit un groupoïde de Picard  $\mathcal{P}$  fibré au-dessus de  $\mathcal{A}$ .

**4.3.2.** — L'homomorphisme  $\chi^* J \rightarrow I$  du lemme 2.2.1 induit pour tout  $S$ -point  $(E, \phi)$  au-dessus de  $a$  un homomorphisme

$$J_a \rightarrow \text{Aut}_{X \times S}(E, \phi) = h_{E,\phi}^* I.$$

Par conséquent, on peut tordre  $(E, \phi)$  par n'importe quel  $J_a$ -torseur. Ceci définit une action du groupoïde de Picard  $\mathcal{P}_a(S)$  fibré sur le groupoïde  $\mathcal{M}_a(S)$ . En laissant le point  $a$  varier, on obtient une action de  $\mathcal{P}$  sur  $\mathcal{M}$  relativement à la base  $\mathcal{A}$ .

Comme pour les fibres de Springer affines, nous considérons l'ouvert  $\mathcal{M}^{\text{reg}}$  de  $\mathcal{M}$  dont les points sont les morphisme  $h_{E,\phi} : X \times S \rightarrow [\mathfrak{g}_D/G]$  qui se factorisent par l'ouvert  $[\mathfrak{g}_D^{\text{reg}}/G]$ .

**Proposition 4.3.3.** —  *$\mathcal{M}^{\text{reg}}$  est un ouvert de  $\mathcal{M}$  ayant des fibres non vides au-dessus de  $\mathcal{A}$ . De plus, c'est torseur sous l'action de  $\mathcal{P}$ .*

*Démonstration.* — Pour tout  $a \in \mathcal{A}(\bar{k})$ , le point  $[\epsilon]^{D'}(a)$  construit dans cf. 2.2.5 est dans l'ouvert régulier. Ceci montre que le morphisme  $\mathcal{M}^{\text{reg}} \rightarrow \mathcal{A}$  a les fibres non vides. On déduit du lemme 2.2.1 que  $\mathcal{M}_a^{\text{reg}}$  est un torseur sous  $\mathcal{P}_a$ .  $\square$

**4.3.4.** — La section de Kostant-Hitchin 4.2.4  $\epsilon_{D'} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{M}$  se factorise par l'ouvert  $\mathcal{M}^{\text{reg}}$  car la section de Kostant  $\epsilon : \mathfrak{c} \rightarrow \mathfrak{g}$  se factorise à travers  $\mathfrak{g}^{\text{reg}}$ .

**4.4. Dimensions.** — Nous allons utiliser la même notation  $\mathfrak{c}_D$  pour désigner le  $X$ -schéma en vectoriels et le  $\mathcal{O}_X$ -module localement libre. Si  $G$  est déployé, le  $\mathcal{O}_X$ -module  $\mathfrak{c}_D$  a une expression explicite

$$\mathfrak{c}_D = \bigoplus_{i=1}^r D^{\otimes e_i}$$

où  $e_1, \dots, e_r$  sont des entiers naturels qui apparaissent dans 1.1.1. En général,  $\mathfrak{c}_D$  prend cette forme après un changement de base fini étale  $\rho : X_\rho \rightarrow X$  qui déploie  $G$ . Par définition, le  $X$ -schéma en vectoriel  $\mathfrak{c}_D$  est

$$\mathfrak{c}_D = \text{Spec}(\text{Sym}_{\mathcal{O}_X}(\mathfrak{c}_D^*))$$

où  $\text{Sym}_{\mathcal{O}_X}[\mathfrak{c}_D^*]$  est le faisceau en  $\mathcal{O}_X$ -algèbre puissance symétrique du  $\mathcal{O}_X$ -module dual  $\mathfrak{c}_D^*$ .

**Lemme 4.4.1.** — *Si  $D > 2g - 2$ ,  $\mathcal{A}$  est un  $k$ -espace affine de dimension*

$$\dim(\mathcal{A}) = \sharp \Phi \deg(D)/2 + r(1 - g + \deg(D))$$

*où  $r$  est le rang de  $\mathbb{G}$  et  $\sharp \Phi$  est le nombre de ses racines.*



*Démonstration.* — Soit  $\rho : X_\rho \rightarrow X$  le revêtement fini étale galosien qui déploie  $G$ . Alors  $\rho^*\mathfrak{c}_D$  est isomorphe à une somme directe  $\rho^*D^{\otimes e_i}$ . Il s'ensuit que

$$\deg(\mathfrak{c}_D) = (e_1 + \cdots + e_r) \deg(D).$$

On a l'égalité

$$\dim H^0(X, \mathfrak{c}_D) + \dim H^1(X, \mathfrak{c}_D) = (e_1 + \cdots + e_r) \deg(D) + r(1 - g)$$

par le théorème de Riemann-Roch. On sait d'après Kostant que les entiers  $e_i - 1$  sont les exposants du système de racines  $\Phi$  de sorte que

$$e_1 + \cdots + e_r = r + \sharp \Phi / 2.$$

Il suffit donc de démontrer que  $H^1(X, \mathfrak{c}_D) = 0$ . Puisque  $\deg(D) > 2g - 2$  et puisque  $\rho$  est fini étale, on a

$$\deg(\rho^*D) > \deg(\rho^*\Omega_{X/k}) = \deg(\Omega_{X_\rho/k})$$

d'où résulte l'annulation de  $H^1(X_\rho, \rho^*D^{\otimes e_i})$ . Pour démontrer l'annulation de  $H^1(X, \mathfrak{c}_D)$ , il suffit de remarquer que  $H^1(X, \mathfrak{c}_D)$  est un facteur direct de  $H^1(X_\rho, \rho^*\mathfrak{c}_D)$ .  $\square$

Si  $\deg(D)$  est un entier fixé plus grand que  $2g - 2$ , la dimension de la base de Hitchin  $\mathcal{A}$  ne dépend donc ni de  $D$  ni de la forme quasi-déployée.

**Proposition 4.4.2.** — *Le champ de Picard  $\mathcal{P}$  est lisse au-dessus de  $\mathcal{A}^\vee$ .*

*Démonstration.* — Puisque  $J_a$  est un schéma en groupe lisse commutatif, l'obstruction à la déformation d'un  $J_a$ -torseur gît dans le groupe  $H^2(\bar{X}, \text{Lie}(J_a))$ . Celui-ci est nul car  $\bar{X}$  est un schéma de dimension un.  $\square$

**Proposition 4.4.3.** — *Pour tout  $a \in \mathcal{A}(\bar{k})$ , on a un isomorphisme canonique  $\text{Lie}(J_a) = \mathfrak{c}_D^* \otimes D$ .*

Dans la démonstration qui suit lorsque  $f : X \rightarrow Y$  et si  $\mathcal{L}$  est un  $\mathcal{O}_Y$ -module, on écrira simplement  $\mathcal{L}$  pour désigner aussi son image inverse  $f^*\mathcal{L}$ . Cet abus de notation ne devrait pas causer de confusion car le schéma qui porte le module sera toujours clair par le contexte.

*Démonstration.* — D'après 2.4.7, l'homomorphisme  $J_a \rightarrow J_a^1$  induit un isomorphisme  $\text{Lie}(J_a) \rightarrow \text{Lie}(J_a^1)$  sur les algèbres de Lie. Par construction de  $J^1$ ,  $\text{Lie}(J_a^1)$  peut se calculer à l'aide du revêtement caméral  $\pi_a : \tilde{X}_a \rightarrow \bar{X}$  par la formule

$$\text{Lie}(J_a^1) = ((\pi_a)_*\mathfrak{t})^W.$$

Rappelons que le revêtement caméral est défini en formant le diagramme cartésien

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X}_a & \longrightarrow & \mathfrak{t}_D \\ \pi_a \downarrow & & \downarrow \pi \\ \bar{X} & \xrightarrow{a} & \mathfrak{c}_D \end{array}$$

Puisque  $\pi$  est fini et plat, la formation de  $\pi_* \mathfrak{t}$  commute à tout changement de base en particulier  $(\pi_a)_* \mathfrak{t} = a^* \pi_* \mathfrak{t}$ . Il suffit donc de calculer  $(\pi_* \mathfrak{t})^W$ .

Puisque  $\mathfrak{c}_D$  est le quotient invariant de  $\mathfrak{t}_D$  par l'action de  $W$ , il en est de même pour les espaces totaux des fibrés tangents  $T_{\mathfrak{t}_D/X}$  et  $T_{\mathfrak{c}_D/X}$ . On en déduit

$$(\pi_* \Omega_{\mathfrak{t}_D/X})^W = \Omega_{\mathfrak{c}_D/X}.$$

Par ailleurs, comme  $\mathfrak{t}_D$  est un fibré vectoriel sur  $X$ , on a  $\Omega_{\mathfrak{t}_D/X} = \mathfrak{t}_{D^{-1}}$ . De même, on a  $\Omega_{\mathfrak{c}_D/X} = \mathfrak{c}_D^*$ . On obtient finalement une égalité de  $\mathcal{O}_{\mathfrak{c}_D}$ -modules  $(\pi_* \mathfrak{t}_{D^{-1}})^W = \mathfrak{c}_D^*$  d'où

$$(\pi_* \mathfrak{t})^W = \mathfrak{c}_D^* \otimes D.$$

En prenant l'image inverse de cette égalité par la section  $a : \bar{X} \rightarrow \mathfrak{c}_D$ , on obtient l'égalité  $\text{Lie}(J_a) = \mathfrak{c}_D^* \otimes_{\mathcal{O}_X} D$ .  $\square$

Dans le cas où  $G$  est déployé, le lemme permet d'exprimer  $\text{Lie}(J_a)$  en termes de  $D$  et des exposants du système de racines  $\Phi$ . Soient  $e_1, \dots, e_r$  les degrés des polynômes invariants homogènes comme dans l'énoncé de 1.1.1, on a

$$\text{Lie}(J_a) = D^{-e_1+1} \oplus \dots \oplus D^{-e_r+1}.$$

Si  $G$  n'est pas déployé,  $\text{Lie}(J_a)$  devient isomorphe à la somme directe de droite sur un revêtement fini étale galoisien de  $X$  qui déploie  $G$ . En particulier

$$\deg(\text{Lie}(J_a)) = \sum_{i=1}^r (-e_i + 1) \deg(D) = -\sharp \Phi \deg(D)/2.$$

**Corollaire 4.4.4.** — *Pour tout  $a \in \mathcal{A}^\heartsuit(\bar{k})$ ,*

$$\dim(\mathcal{P}_a) = \sharp \Phi \deg(D)/2 + r(g-1).$$

*Démonstration.* — On a

$$\dim(\mathcal{P}_a) = \dim(H^1(\bar{X}, \text{Lie}(J_a))) - \dim(H^0(\bar{X}, \text{Lie}(J_a)))$$

de sorte que l'égalité à démontrer résulte de la formule de Riemann-Roch.  $\square$

**4.4.5.** — En comparant avec la formule 4.4.1

$$\dim(\mathcal{A}) = \sharp \Phi \deg(D)/2 + r(1 - g + \deg(D))$$

on obtient

$$\dim(\mathcal{P}) = (r + \sharp \Phi) \deg(D).$$

**4.4.6.** — Dans 4.14.1, on démontrera que  $\mathcal{M}_a^{\text{reg}}$  est dense dans  $\mathcal{M}_a$  de sorte qu'on aura alors les mêmes formules de dimension pour  $\mathcal{M}$

$$\dim(\mathcal{M}_a) = \sharp \Phi \deg(D)/2 + r(g - 1)$$

et

$$\dim(\mathcal{M}) = (r + \sharp \Phi) \deg(D).$$

**4.5. L'ouvert  $\mathcal{A}^\heartsuit$  et le revêtement caméral.** — Considérons le diagramme cartésien

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & \longrightarrow & \mathfrak{t}_D \\ \downarrow & & \downarrow \pi \\ X \times \mathcal{A} & \longrightarrow & \mathfrak{c}_D \end{array}$$

où le morphisme de bas associe un couple  $(x, a)$  avec  $x \in X$  et  $a \in \mathcal{A}$  l'image  $a(x) \in \mathfrak{c}_D$ . Le morphisme de gauche qui se déduit de  $\pi$  par changement de base est un morphisme fini et plat avec une action de  $W$ .

En prenant la fibre en chaque point  $a \in \mathcal{A}(\bar{k})$ , on obtient le revêtement caméral  $\pi_a : \tilde{X}_a \rightarrow \bar{X}$  de Donagi. Dans la suite, on va se restreindre aux paramètres  $a$  tels que la courbe camérale est réduite. Ces paramètres forment un ouvert de  $\mathcal{A}$  qui peut être décrit comme suit.

Considérons l'image inverse  $U$  de  $\mathfrak{c}_D^{\text{rs}} \subset \mathfrak{c}_D$  dans  $X \times \mathcal{A}$ . Le morphisme de  $U \rightarrow \mathcal{A}$  étant lisse, son image est un ouvert de  $\mathcal{A}$  que nous allons noter  $\mathcal{A}^\heartsuit$ . Ses  $\bar{k}$ -points sont décrits comme suit

$$\mathcal{A}^\heartsuit(\bar{k}) = \{a \in \mathcal{A}(\bar{k}) \mid a(\bar{X}) \not\subset \mathfrak{D}_{G,D}\}.$$

Si  $\deg(D) > 2g$ , l'ouvert  $\mathcal{A}^\heartsuit$  est non vide. On reporte la démonstration à 4.6.1 où on démontre un énoncé plus fort.

**Lemme 4.5.1.** — *Pour tout point géométrique  $a \in \mathcal{A}^\heartsuit(\bar{k})$ , le revêtement  $\pi_a : \tilde{X}_a \rightarrow X \otimes_k \bar{k}$  est génériquement un torseur sous  $W$ . De plus,  $\tilde{X}_a$  est une courbe réduite.*

*Démonstration.* — Par définition de  $\mathcal{A}^\heartsuit$ , l'intersection  $U_a$  de  $U$  avec la fibre  $X \times \{a\}$  est un ouvert non vide de  $\tilde{X}$ . Par construction,  $\pi_a$  est un  $W$ -torseur au-dessus de cet ouvert dense. Puisque  $\pi_a$  est un morphisme fini plat,  $\pi_{a*}\mathcal{O}_{\tilde{X}_a}$  est un  $\mathcal{O}_{\tilde{X}}$ -module sans torsion. S'il est génériquement réduit, il est partout réduit.  $\square$

La courbe camérale  $\tilde{X}_a$  est munie d'une famille de revêtements finis étales naturels. Considérons une réduction du torseur  $\rho_G$  comme dans cf. 1.3.6 d'où nous reprenons les notations. En particulier, on a un revêtement fini étale  $\rho : X_\rho \rightarrow X$  galoisien de groupe de Galois  $\Theta_\rho$  qui induit  $\rho_{\text{Out}}$  par le changement de groupes structuraux  $\Theta_\rho \rightarrow \text{Out}(\mathbb{G})$ . On a alors un diagramme cartésien

$$(4.5.2) \quad \begin{array}{ccc} X_\rho \times \mathbb{t} & \xrightarrow{\pi} & X_\rho \times \mathbb{c} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{t} & \xrightarrow{\pi} & \mathbb{c} \end{array}$$

Pour tout  $a \in \mathcal{A}(\bar{k})$ , construisons le revêtement  $\pi_{\rho,a} : \tilde{X}_{\rho,a} \rightarrow \tilde{X}$  en formant le produit cartésien

$$(4.5.3) \quad \begin{array}{ccc} \tilde{X}_{\rho,a} & \longrightarrow & X_\rho \times \mathbb{t}_D \\ \pi_{\rho,a} \downarrow & & \downarrow \pi_\rho \\ \tilde{X} & \xrightarrow{a} & \mathbb{c}_D \end{array}$$

On a alors un morphisme fini étale  $\tilde{X}_{\rho,a} \rightarrow \tilde{X}_a$  qui est galoisien de groupe de Galois  $\Theta_\rho$ .

La discussion ci-dessus s'applique encore si on dispose d'une réduction  $\bar{\rho}$  du  $\text{Out}(\mathbb{G})$ -torseur  $\bar{\rho}_G$  sur  $\tilde{X}$ .

**Proposition 4.5.4.** — *Soit  $\bar{\rho} : \tilde{X}_{\bar{\rho}} \rightarrow \tilde{X}$  un revêtement fini étale galoisien et connexe. Supposons que  $\deg(D) > 2g$ . Alors pour tout  $a \in \mathcal{A}^\heartsuit(\bar{k})$ , la courbe  $\tilde{X}_{\bar{\rho},a}$  est connexe.*

*Démonstration.* — Rappelons un résultat de connexité général de Fulton et Hansen cf. [22, théorème 4.1].

**Théorème 4.5.5.** — *Soient  $M, N$  des  $\bar{k}$ -schémas irréductibles avec des morphismes propres  $f : M \rightarrow \mathbb{P}^h$  et  $g : N \rightarrow \mathbb{P}^h$  tels que  $\dim(f(M)) + \dim(g(N)) > h$ . Alors  $M \times_{\mathbb{P}^h} N$  est connexe.*

Voici comment appliquer ce résultat à notre cas particulier. En passant au revêtement  $\bar{\rho} : \bar{X}_{\bar{\rho}} \rightarrow \bar{X}$ ,  $\mathfrak{c}_D$  se décompose en une somme directe  $\mathfrak{c}_D = \bigoplus_{i=1}^r D^{\otimes e_i}$ . La section  $a \in \Gamma(X, \mathfrak{c}_D)$  définit alors des sections  $a_i \in \Gamma(\bar{X}_{\bar{\rho}}, D^{\otimes e_i})$  pour tous  $i = 1, \dots, r$ . En tant que schéma au-dessus de  $\bar{X}_{\bar{\rho}}$ ,

$$\mathfrak{c}_D \times_X \bar{X}_{\bar{\rho}} = \bar{X}_{\bar{\rho}} \times \mathbb{C}_D$$

est un produit des fibrés en droites  $D^{\otimes e_i}$ . Compactifions chacun de ces fibrés en droites  $D^{\otimes e_i}$  en un fibré en droites projective  $\mathbb{P}^1(D^{\otimes e_i} \oplus \mathcal{O}_{X_{\rho}})$ . Leur produit

$$\mathbb{P}_{X_{\rho}}^{e_1, \dots, e_r}(D) = \mathbb{P}^1(D^{\otimes e_1} \oplus \mathcal{O}_{\bar{X}_{\bar{\rho}}}) \times_{\bar{X}_{\bar{\rho}}} \cdots \times_{\bar{X}_{\bar{\rho}}} \mathbb{P}^1(D^{\otimes e_r} \oplus \mathcal{O}_{\bar{X}_{\bar{\rho}}})$$

est une compactification de  $\mathfrak{c}_D \times_X \bar{X}_{\bar{\rho}}$ . Il est géométriquement connexe car  $\bar{X}_{\bar{\rho}}$  l'est par hypothèse. Soit  $M$  la normalisation de  $\mathbb{P}_{X_{\rho}}^{e_1, \dots, e_r}(D)$  dans le revêtement fini et plat  $\bar{X}_{\bar{\rho}} \times \mathbb{C}_D \rightarrow \bar{X}_{\bar{\rho}} \times \mathbb{C}_D$ .

Considérons aussi le produit au-dessus de  $k$

$$\mathbb{P}^{e_1, \dots, e_r}(D) = \mathbb{P}^1(D^{\otimes e_1} \oplus \mathcal{O}_{\bar{X}_{\bar{\rho}}}) \times \cdots \times \mathbb{P}^1(D^{\otimes e_r} \oplus \mathcal{O}_{\bar{X}_{\bar{\rho}}})$$

qui contient  $\mathbb{P}^1(D^{\otimes e_i} \oplus \mathcal{O}_{\bar{X}_{\bar{\rho}}})$  comme un sous-schéma fermé. Chaque facteur  $\mathbb{P}^1(D^{\otimes e_i})$  est muni d'un fibré en droites  $\mathcal{O}(1)$  très ample relativement à  $k$  car sous l'hypothèse  $\deg(D) > 2g$ . Il induit un plongement de  $\mathbb{P}^1(D^{\otimes e_i})$  dans un espace projectif  $\mathbb{P}^{h_i}$ . La composante  $a_i \in \Gamma(\bar{X}_{\bar{\rho}}, D^{\otimes e_i})$  de  $a$  définit un hyperplan  $H_{a_i}$  dans ce projectif. L'image de la section

$$a : \bar{X}_{\bar{\rho}} \rightarrow \bar{X}_{\bar{\rho}} \times \mathbb{C}_D$$

est alors l'image réciproque dans  $\mathbb{P}_{\bar{X}_{\bar{\rho}}}^{e_1, \dots, e_r}(D)$  de

$$H_1 \times \cdots \times H_r \subset \mathbb{P}^{h_1} \times \cdots \times \mathbb{P}^{h_r}.$$

Il s'ensuit que  $\tilde{X}_{\bar{\rho}, a}$  est l'image réciproque dans  $M$  du même produit d'hyperplans. Il ne reste qu'à prendre le plongement de Veronese de  $\mathbb{P}^{h_1} \times \cdots \times \mathbb{P}^{h_r}$  pour être en position d'appliquer le théorème de Fulton-Hansen qui implique que la courbe  $\tilde{X}_{\bar{\rho}, a}$  est connexe.  $\square$

**4.6. L'ouvert  $\mathcal{A}^{\diamond}$ .** — Commençons par étudier l'ouvert  $\mathcal{A}^{\diamond}$  où les fibres de  $\mathcal{M}_a$  sont aussi simples que possible. Cet ouvert est défini comme suit. Un point  $a \in \mathcal{A}(\bar{k})$  appartient à cet ouvert si la section  $h_a : \bar{X} \rightarrow \mathfrak{c}_D$  coupe transversalement le diviseur  $\mathfrak{D}_D$ . Ici  $\mathfrak{D}_D$  désigne le diviseur de  $\mathfrak{c}_D$  obtenu en tordant le diviseur  $\mathfrak{D} \subset \mathfrak{c}$  par le  $\mathbb{G}_m$ -torseur  $L_D$  associé au fibré inversible  $D$ .

**Proposition 4.6.1.** — *Si  $\deg(D) > 2g$ , l'ouvert  $\mathcal{A}^{\diamond}$  est non vide.*

La démonstration est complètement similaire à celle du théorème de Bertini due à Zariski. Commençons par démontrer un lemme.

**Lemme 4.6.2.** — *Supposons  $\deg(D) > 2g$  où  $g$  est le genre de  $X$ . Pour tout  $x \in \bar{X}(\bar{k})$  défini par un idéal  $\mathfrak{m}_x$ . La flèche*

$$H^0(\bar{X}, \mathfrak{c}) \rightarrow \mathfrak{c} \otimes_{\mathcal{O}_{\bar{X}}} \mathcal{O}_{\bar{X}}/\mathfrak{m}_x^2.$$

*est surjective. Ici le fibré vectoriel  $\mathfrak{c}$  est vu comme un  $\mathcal{O}_X$ -module localement libre de rang  $r$ .*

*Démonstration.* — En passant au revêtement fini étale  $\rho : X_\rho \rightarrow X$ ,  $\mathfrak{c}$  devient isomorphe à une somme directe

$$\rho^* \mathfrak{c} = \bigoplus_{i=1}^r \rho^* D^{\otimes e_i}$$

où  $e_i$  sont définis dans 1.1.1 et en particulier sont des entiers plus grand ou égal à 1. Comme  $\mathfrak{c}$  est un facteur direct de  $\rho_* \rho^* \mathfrak{c}$ , il suffit de démontrer la surjectivité de la flèche

$$H^0(\bar{X}', \rho^* \mathfrak{c}) \rightarrow \rho^* \mathfrak{c} \otimes_{\mathcal{O}_{\bar{X}}} \mathcal{O}_{\bar{X}}/\mathfrak{m}_x^2.$$

Il suffit de démontrer cette surjectivité pour chacun des facteurs directs  $\rho^* D^{\otimes e_i}$ .

Il est loisible de supposer ici que  $X_\rho$  est géométriquement connexe. Notons  $g'$  son genre. On a alors  $2g' - 2 = n(2g - 2)$  où  $n$  est le degré de  $\rho$ . La surjectivité ci-dessus se déduit de l'inégalité

$$\deg(D^{\otimes e_i}) > 2ng = (2g' - 2) + 2n.$$

Le lemme en résulte. □

*Démonstration.* — Revenons à la proposition 4.6.1. Dans  $\mathfrak{D}_{G,D}$ , on a un ouvert lisse  $\mathfrak{D}_D - \mathfrak{D}_D^{\text{sing}}$  complément d'un fermé  $\mathfrak{D}_D^{\text{sing}}$  de codimension 2 dans  $\mathfrak{c}_D$ .

Considérons le sous-schéma  $Z_1$  de  $(\mathfrak{D}_{G,D} - \mathfrak{D}_{G,D}^{\text{sing}}) \times \mathcal{A}$  constitué des couples  $(c, a)$  tels que la section  $a(\bar{X})$  passe par le point  $c$  et intersecte avec le diviseur  $\mathfrak{D}_G$  en ce point avec une multiplicité au moins 2. D'après le lemme ci-dessus

$$\dim(Z_1) \leq \dim(\mathcal{A}) - 1$$

de sorte que la projection  $Z_1 \rightarrow \mathcal{A}$  n'est pas surjective.

Considérons le sous-schéma  $Z_2$  de  $\mathfrak{D}_G^{\text{sing}} \times \mathcal{A}$  des couples  $(c, a)$  tels que la section  $a(\bar{X})$  passe par  $c$ . De nouveau d'après le lemme, on a une estimation de dimension

$$\dim(Z_2) \leq \dim(\mathcal{A}) - 1$$

de sorte que la réunion des images de  $Z_1$  et de  $Z_2$  est contenu dans un sous-schéma fermé strict de  $\mathcal{A}$ . Il existe donc un point  $a \in \mathcal{A}^\heartsuit$  telle qu la section  $a(\bar{X})$  ne coupe pas le lieu singulier  $\mathfrak{D}_{G,D}^{\text{sing}}$  du discriminant et coupe le lieu lisse de ce diviseur transversalement.  $\square$

**Lemme 4.6.3.** — *Un point  $a \in \mathcal{A}(\bar{k})$  est dans l'ouvert  $\mathcal{A}^\diamond(\bar{k})$  si et seulement si la courbe camérale  $\tilde{X}_a$  est lisse.*

*Démonstration.* — Supposons que  $a \in \mathcal{A}^\diamond(\bar{k})$  c'est-à-dire la section  $a(\bar{X})$  dans  $\mathfrak{c}_D$  coupe transversalement le diviseur  $\mathfrak{D}_{G,D}$ . Montrons que l'image inverse de cette section sur le revêtement  $X_\rho \times \mathfrak{t}_D$  est lisse. En dehors du diviseur  $\mathfrak{D}_{G,D}$ , ce revêtement est étale si bien qu'il n'y rien à vérifier. La condition  $a(\bar{X})$  dans  $\mathfrak{c}_D$  coupe transversalement le diviseur  $\mathfrak{D}_{G,D}$  implique en particulier qu'elle ne coupe pas le lieu singulier  $\mathfrak{D}_{G,D}^{\text{sing}}$  de  $\mathfrak{D}_{G,D}$ . Un couple  $(v, x) \in \mathfrak{t}_D(\bar{k})$  est composé d'un point  $v \in X(\bar{k})$  et d'un point  $x$  dans la fibre de  $\mathfrak{t}_D$  au-dessus de  $x$ . Au-dessus de  $v$ , le groupe  $G$  est déployé de sorte qu'on peut parler des hyperplans de racines dans la fibre de  $\mathfrak{t}_D$  au-dessus de  $v$ . Si  $(v, x) \in \mathfrak{t}_D(\bar{k})$  est au-dessus d'un point intersection de  $a(\bar{X})$  avec  $\mathfrak{D}_{G,D} - \mathfrak{D}_{G,D}^{\text{sing}}$ ,  $x$  appartient à un unique hyperplan de racines. On peut donc se ramener au cas d'un groupe de rang semi-simple un. Dans ce cas, un calcul direct montre que le complété formel  $\tilde{X}_a$  en  $(v, x)$  est de la forme  $\bar{k}[[\epsilon_v]][t]/(t^2 - \epsilon_v^m)$  où  $\epsilon_v$  est un uniformisant de  $\bar{X}$  en le point  $v$  et  $m$  est la multiplicité d'intersection de  $a(\bar{X})$  avec  $\mathfrak{D}_{G,D}$  en ce point. Dans le cas transversal  $m = 1$  ceci implique que  $\tilde{X}_a$  est lisse en  $(\tilde{v}, x)$ .

Supposons maintenant que  $a \notin \mathcal{A}^\diamond(\bar{k})$ . Si  $a(\bar{X})$  coupe le lieu lisse de  $\mathfrak{D}_{G,D}$  avec une multiplicité plus grand que un, le calcul ci-dessus montrer que  $\tilde{X}_a$  n'est pas lisse. Supposons maintenant que  $a(\bar{X})$  coupe le lieu  $\mathfrak{D}_{G,D}^{\text{sing}}$  en un point  $v \in \bar{X}$ . Supposons que  $\tilde{X}_a$  est lisse en le point  $(v, x) \in \mathfrak{t}_D(\bar{k})$  au-dessus de  $v$ . Le point  $x$  appartient alors à au moins deux hyperplans de racine différents de sorte que le groupe de monodromie locale  $\pi_a^\bullet(I_v)$  cf. 3.7.3 contient deux involutions différentes. Ceci n'est pas possible car sous l'hypothèse que la caractéristique de  $k$  ne divise l'ordre de  $\mathbb{W}$ , le groupe de monodromie locale  $\pi_a^\bullet(I_v)$  est un groupe cyclique.  $\square$

**Corollaire 4.6.4.** — Soit  $\bar{X}_{\bar{\rho}} \rightarrow \bar{X}$  un revêtement fini étale galoisien connexe. Supposons  $\deg(D) > 2g$ . Alors pour tout  $a \in \mathcal{A}^{\diamond}(\bar{k})$ , la courbe  $\tilde{X}_{\bar{\rho},a}$  est irréductible.

*Démonstration.* — D’après 4.5.4,  $\tilde{X}_{\rho,a}$  est connexe. Comme  $\tilde{X}_a$  est lisse, le revêtement étale  $\tilde{X}_{\rho,a}$  l’est aussi. Elle est donc irréductible.  $\square$

**Définition 4.6.5.** — Un champ abélien est le quotient d’une variété abélienne par l’action triviale d’un groupe diagonalisable.

L’exemple typique d’un champ abélien est le champ classifiant les fibrés inversibles de degré zéro sur une courbe projective lisse géométriquement connexe. Si cette courbe est munie d’une action d’un groupe fini d’ordre premier à la caractéristique, les champs de Prym associés sont des champs abéliens.

**Proposition 4.6.6.** — Pour tout  $a \in \mathcal{A}^{\diamond}(\bar{k})$ , l’ouvert  $\mathcal{M}_a^{\text{reg}}$  est  $\mathcal{M}_a$  tout entier de sorte que  $\mathcal{M}_a$  est un torseur sous  $\mathcal{P}_a$ . La composante neutre de  $\mathcal{P}_a$  est un champ abélien.

On renvoie à [55, proposition 4.2] pour la démonstration de la première assertion. La démonstration de la seconde assertion est reportée à fin du paragraphe 4.8.

**4.7. Cas linéaire.** — On va analyser les fibres de  $\mathcal{M}$  et de  $\mathcal{P}$  au-dessus d’un point  $a \in \mathcal{A}^{\heartsuit}(\bar{k})$ . Commençons par le cas du groupe linéaire : soit  $G = \text{GL}(r)$ . Dans ce cas, on peut décrire les fibres de Hitchin à l’aide des courbes spectrales en suivant Hitchin [32] et Beauville-Narasimhan-Ramanan [5]. On pourrait faire de même pour les groupes classiques cf. [32] et [57].

**4.7.1.** — Dans le cas  $G = \text{GL}(r)$ , l’espace affine  $\mathcal{A}$  est l’espace vectoriel

$$\mathcal{A} = \bigoplus_{i=1}^r H^0(X, D^{\otimes i}).$$

La donnée d’un point  $a = (a_1, \dots, a_r) \in \mathcal{A}(\bar{k})$  détermine une courbe spectrale  $Y_a$  tracée sur l’espace total  $\Sigma_D$  du fibré en droites  $D$ . Cette courbe est donnée par l’équation

$$t^r - a_1 t^{r-1} + \dots + (-1)^r a_r = 0.$$



On définit un ouvert  $\mathcal{A}^\heartsuit$  de  $\mathcal{A}$  dont les points géométriques  $a \in \mathcal{A}^\heartsuit(\bar{k})$  définissent une courbe spectrale réduite. Si  $a \in \mathcal{A}^\heartsuit(\bar{k})$ , la fibre de Hitchin  $\mathcal{M}_a$  est le groupoïde  $\overline{\text{Pic}}(Y_a)$  des  $\mathcal{O}_{Y_a}$ -modules sans torsion de rang un d'après [5]. La fibre  $\mathcal{P}_a$  est le groupoïde  $\text{Pic}(Y_a)$  des  $\mathcal{O}_{Y_a}$ -modules inversibles.  $\text{Pic}(Y_a)$  agit sur  $\overline{\text{Pic}}(Y_a)$  par produit tensoriel et  $\overline{\text{Pic}}(Y_a)$  contient  $\text{Pic}(Y_a)$  comme un ouvert.

**4.7.2.** — Si la courbe spectrale  $Y_a$  est lisse alors il n'y pas de différence entre  $\text{Pic}(Y_a)$  et  $\overline{\text{Pic}}(Y_a)$  c'est-à-dire  $\mathcal{P}_a$  agit simplement transitivement sur  $\mathcal{M}_a$ . De plus, dans ce cas, la structure de  $\mathcal{P}_a$  est aussi simple que possible. Le groupe des composantes connexes de  $\mathcal{P}_a$  est isomorphe à  $\mathbb{Z}$  par l'application degré car  $Y_a$  est connexes. La composante neutre de  $\mathcal{P}_a$  est le quotient de la jacobienne de  $Y_a$  qui est une variété abélienne, par le groupe  $\mathbb{G}_m$  agissant trivialement.

**4.7.3.** — Soit  $\xi : Y_a^\flat \rightarrow Y_a$  la normalisation de  $Y_a$ . Le foncteur d'image réciproque induit un homomorphisme

$$\xi^* : \text{Pic}(Y_a) \rightarrow \text{Pic}(Y_a^\flat)$$

qui induit un isomorphisme

$$\pi_0(\text{Pic}(Y_a)) \xrightarrow{\sim} \pi_0(\text{Pic}(Y_a^\flat)) = \mathbb{Z}^{\pi_0(Y_a^\flat)}.$$

Le noyau de  $\xi^*$  est un groupe affine commutatif de dimension

$$\delta_a = \dim H^0(Y_a, \xi_* \mathcal{O}_{Y_a^\flat} / \mathcal{O}_{Y_a}).$$

**4.7.4.** — Par construction,  $Y_a$  est une courbe tracée sur une surface lisse en particulier n'a que des singularités planes. D'après Altman, Iarrobino et Kleiman [1],  $\text{Pic}(Y_a)$  est alors un ouvert dense de  $\overline{\text{Pic}}(Y_a)$ .

Nous allons maintenant généraliser la discussion ci-dessus à un groupe réductif général.

**4.8. Modèle de Néron global.** — Dans ce paragraphe, on fixe un point  $a \in \mathcal{A}^\heartsuit(\bar{k})$  et on note  $U$  l'image réciproque de l'ouvert  $\mathfrak{c}_D^{\text{rs}}$  par le morphisme  $a : \bar{X} \rightarrow \mathfrak{c}_D^{\text{rs}}$ .

Comme dans le cas local 3.8, la structure du champ de Picard  $\mathcal{P}_a$  des  $J_a$ -torseurs sur  $\bar{X}$  peut être analysée à l'aide du modèle de Néron  $J_a^\flat$  de  $J_a$ . C'est un schéma en groupes lisse de type fini au-dessus de  $\bar{X}$  muni d'un homomorphisme  $J_a \rightarrow J_a^\flat$  qui est un isomorphisme au-dessus de  $U$ . Il est de plus caractérisé par la propriété suivante : pour tout schéma en groupes lisse de type fini  $J'$  sur  $\bar{X}$  avec un homomorphisme  $J_a \rightarrow J'$  qui

est un isomorphisme sur  $U$ , il existe un unique homomorphisme  $J' \rightarrow J_a^b$  tel que le triangle évident commute. L'existence de ce modèle de Néron est un résultat de Bosch, Lutkebohmmer et Raynaud *cf.* [9] qu'ils l'appellent le modèle de Néron de type fini à distinguer avec le modèle de Néron localement de type fini.

Ce modèle de Néron global s'obtient à partir des modèles de Néron locaux *cf.* 3.8 comme suit. Pour tout  $v \in \bar{X} - U$ , on note  $\bar{X}_v$  la complétion de  $\bar{X}$  en  $v$  et  $\bar{X}_v^\bullet = \bar{X}_v - \{v\}$ . Considérons le modèle de Néron du tore  $J_a|_{\bar{X}_v^\bullet}$ . En recollant les modèles de Néron en les différents points  $v \in \bar{X} - U$  avec le tore  $J_a|_U$ , on obtient un schéma en groupes commutatifs lisse  $J_a^b$  au-dessus  $\bar{X}$  muni d'un homomorphisme de schémas en groupes  $J_a \rightarrow J_a^b$ .

Comme dans 3.8.2,  $J_a^b$  peut être exprimé à l'aide de la normalisation  $\tilde{X}_a^b$  de la courbe camérale  $\tilde{X}_a$ . L'action de  $W$  sur  $\tilde{X}_a$  induit une action de ce groupe sur  $\tilde{X}_a^b$ . Notons  $\pi_a^b : \tilde{X}_a^b \rightarrow \bar{X}$  le morphisme vers  $\bar{X}$ . Voici la conséquence globale de l'énoncé local 3.8.2.

**Corollaire 4.8.1.** —  $J_a^b$  s'identifie au sous-groupe des points fixes sous l'action diagonale de  $W$  dans  $\prod_{\tilde{X}_a^b/\bar{X}} (T \times_{\bar{X}} \tilde{X}_a^b)$ .

La variante suivante sera utile dans la suite. Considérons une réduction de  $\bar{\rho}_G$  donnée sous la forme  $\bar{\rho} : \bar{X}_{\bar{\rho}} \rightarrow \bar{X}$  torseur sous  $\Theta_{\bar{\rho}}$ . Pour tout  $a \in \mathcal{A}^\vee(\bar{k})$ , on a un revêtement fini plat  $\pi_{\bar{\rho},a} : \tilde{X}_{\bar{\rho},a} \rightarrow \bar{X}$  comme dans 4.5.3 qui est génériquement étale galoisien de groupe de Galois  $\mathbb{W} \rtimes \Theta_{\bar{\rho}}$ . Soit  $\tilde{X}_{\bar{\rho},a}^b$  la normalisation de  $\tilde{X}_{\bar{\rho},a}$  qui est aussi munie d'une action de  $\mathbb{W} \rtimes \Theta_{\bar{\rho}}$ . Soit  $\pi_{\bar{\rho},a}^b$  sa projection sur  $\bar{X}$ . On a alors

$$J_a^b = \prod_{\tilde{X}_{\bar{\rho},a}^b/\bar{X}} (\mathbb{T} \times_{\tilde{X}_{\bar{\rho},a}^b} \tilde{X}_{\bar{\rho},a}^b)^{\mathbb{W} \rtimes \Theta_{\bar{\rho}}}.$$

Considérons le groupoïde de Picard  $\mathcal{P}_a^b$  des  $J_a^b$ -torseurs. L'homomorphisme de schémas en groupes  $J_a \rightarrow J_a^b$  induit un homomorphisme de groupoïdes de Picard  $\mathcal{P}_a \rightarrow \mathcal{P}_a^b$ . Cet homomorphisme réalise essentiellement la structure générale d'un groupe algébrique sur un corps algébriquement clos comme l'extension d'une variété abélienne par un groupe algébrique affine *cf.* [63]. La démonstration qui suit s'inspire d'un argument de Raynaud [61].

**Proposition 4.8.2.** — (1) L'homomorphisme  $\mathcal{P}_a(\bar{k}) \rightarrow \mathcal{P}_a^b(\bar{k})$  est essentiellement surjectif.

(2) La composante neutre  $(\mathcal{P}_a^b)^0$  de  $\mathcal{P}_a^b$  est un champ abélien.

(3) Le noyau  $\mathcal{R}_a$  de  $\mathcal{P}_a \rightarrow \mathcal{P}_a^b$  est un produit de groupes algébriques affines de type fini  $\mathcal{R}_v(a)$  qui sont définis dans le lemme 3.8.1. Ceux-ci sont triviaux sauf en un nombre fini de points  $v \in |\bar{X}|$ .

*Démonstration.* — (1) Par construction même des modèles de Néron, l'homomorphisme  $J_a \rightarrow J_a^b$  est injectif en tant qu'homomorphisme entre faisceaux en groupes abéliens pour la topologie étale de  $\bar{X}$ . Considérons la suite exacte

$$(4.8.3) \quad 1 \rightarrow J_a \rightarrow J_a^b \rightarrow J_a^b/J_a \rightarrow 1$$

où le quotient  $J_a^b/J_a$  est supporté par le fermé fini  $\bar{X} - U$  et la suite exacte longue de cohomologie qui s'en déduit. Comme  $H^1(\bar{X}, J_a^b/J_a) = 0$ , l'homomorphisme

$$H^1(\bar{X}, J_a) \rightarrow H^1(\bar{X}, J_a^b)$$

est surjectif.

(2) Soit  $\tilde{X}_a$  l'image réciproque du revêtement  $\mathbf{t}_D \rightarrow \mathbf{c}_D$  par le morphisme  $h_a : \bar{X} \rightarrow \mathbf{c}_D$ . Soit  $\tilde{X}_a^b$  la normalisation de  $\tilde{X}_a$ . D'après la proposition 3.8.2, le modèle de Néron  $J_a^b$  ne dépend que du revêtement  $\tilde{X}_a^b$ . Plus précisément  $J_a^b$  consiste en les points fixes sous l'action diagonale de  $W$  dans la restriction à la Weil  $\prod_{\tilde{X}_a^b/\bar{X}} (T \times_{\bar{X}} \tilde{X}_a^b)$ . Il en résulte qu'à isogénie près,  $\mathcal{P}_a^b$  est un facteur du groupoïde des  $T$ -torseurs sur  $\tilde{X}_a^b$  lequel est isomorphe au produit de  $r$  copies du  $\text{Pic}(\tilde{X}_a^b)$ . Puisque  $\tilde{X}_a^b$  est une courbe projective lisse éventuellement non connexe, la composante neutre de  $\text{Pic}(\tilde{X}_a^b)$  est le quotient d'un produit de variétés jacobiniennes par un produit de  $\mathbb{G}_m$  agissant trivialement.

(3) La dernière assertion résulte aussi de la suite exacte longue de cohomologie qui se déduit de la suite exacte courte (4.8.3). Ayant défini le noyau comme la catégorie des  $J_a$ -torseurs munis d'une trivialisation du  $J_a^b$ -torseur qui s'en déduit, on n'a pas en fait à se préoccuper des  $H^0$  dans la suite longue.

Ceci termine la démonstration de la proposition.  $\square$

*Démonstration.* — Revenons maintenant à la seconde assertion de 4.6.6. Soit  $a \in \mathcal{A}^\diamond(\bar{k})$ . La courbe camérale  $\tilde{X}_a$  est alors une courbe lisse de sorte que le conoyau de l'homomorphisme  $J_a \rightarrow J_a^b$  est un faisceau de groupes finis supporté par un sous-schéma fini de  $\bar{X}$ . Il s'ensuit que  $\mathcal{P}_a \rightarrow \mathcal{P}_a^b$  est une isogénie de groupoïdes de Picard c'est-à-dire un homomorphisme essentiellement surjectif à noyau fini. Puisque  $\mathcal{P}_a^b$  est un champ abélien, il en est de même de  $\mathcal{P}_a$ .  $\square$

**4.9. Invariant  $\delta_a$ .** — Pour tout  $a \in \mathcal{A}^\heartsuit(\bar{k})$ , considérons le noyau

$$(4.9.1) \quad \mathcal{R}_a := \ker[\mathcal{P}_a \longrightarrow \mathcal{P}_a^b]$$

Il classifie les  $J_a$ -torseurs sur  $X$  dont le  $J_a^b$ -torseur qui s'en déduit est muni d'une trivialisation. C'est un groupe algébrique affine de type fini qui se décompose en produit

$$\mathcal{R}_a = \prod_{v \in \bar{X} - U} \mathcal{R}_v(a)$$

où  $\mathcal{R}_v(a)$  est le groupe défini en 3.8.1.

On définit l'invariant  $\delta_a$  comme la dimension de  $\mathcal{R}_a$  qui s'écrit donc comme une somme d'invariants  $\delta$  locaux

$$\delta_a := \dim(\mathcal{R}_a) = \sum_{v \in \bar{X} - U} \delta_v(a).$$

La conjonction de 4.8.2 et de la formule de dimension du groupe des symétries locales 3.8.3 donne une formule pour l'invariant  $\delta$  global.

**Corollaire 4.9.2.** — Pour tout  $a \in \mathcal{A}(\bar{k})$ , l'invariant  $\delta_a$  défini comme ci-dessus est égal à

$$\delta_a = \dim H^0(\bar{X}, \mathfrak{t} \otimes_{\mathcal{O}_{\bar{X}}} (\pi_{a*} \mathcal{O}_{\tilde{X}_a^b} / \pi_{a*} \mathcal{O}_{\tilde{X}_a}))^W.$$

De nouveau, on a une autre formule qui exprime l'invariant  $\delta$  global en fonction du discriminant corrigé par des invariants monodromiques locaux comme dans la formule de Bezrukavnikov.

Rappelons que le discriminant  $\mathfrak{D}_G$  est un polynôme homogène de degré  $\sharp \Phi$  sur  $\mathfrak{c}$ ,  $\sharp \Phi$  étant le nombre de racines dans le système de racines  $\Phi$ . Il s'ensuit que pour tout  $a \in \mathcal{A}^\heartsuit(\bar{k})$ ,  $a^* \mathfrak{D}_{G,D}$  est un diviseur linéairement équivalent à  $D^{\otimes(\sharp \Phi)}$  de sorte que

$$\deg(a^* \mathfrak{D}_{G,D}) = \sharp \Phi \deg(D).$$

Ecrivons

$$a^* \mathfrak{D}_{G,D} = d_1 v_1 + \cdots + d_n v_n$$

où  $v_1, \dots, v_n$  sont des points deux à deux distincts de  $\bar{X}$  et où  $d_i$  est la multiplicité de  $v_i$ . Pour tout  $i = 1, \dots, n$ , notons  $c_i$  la chute du rang torique de  $J_a^b$  en le point  $v_i$ . La formule suivante est un corollaire immédiat de 3.7.5.

**Proposition 4.9.3.** — *On a l'égalité*

$$2\delta_a = \sum_{i=1}^n (d_i - c_i) = \# \Phi \deg(D) - \sum_{i=1}^n c_i.$$

**4.10. Le groupe  $\pi_0(\mathcal{P}_a)$ .** — Dans ce paragraphe, nous allons décrire le groupe de composantes connexes de  $\mathcal{P}_a$  dans l'esprit de la dualité de Tate-Nakayama. Pour cela, il est nécessaire de faire un certain nombre de choix et de fixer quelques notations.

Fixons un point  $\infty \in X(\bar{k})$ . Considérons l'ouvert  $\mathcal{A}^\infty$  de  $\bar{\mathcal{A}}$  qui consiste en les points  $a \in \mathcal{A}(\bar{k})$  tels que  $a(\infty) \in \bar{\mathfrak{c}}_D^{\text{rs}}$ . C'est un sous-schéma ouvert de  $\bar{\mathcal{A}}^\heartsuit$ . Si  $\infty$  est défini sur  $k$ , alors l'ouvert  $\mathcal{A}^\infty$  est aussi défini sur  $k$ .

On choisit un déploiement de  $G$  au-dessus de  $\bar{X}$  comme dans 1.3.10. Ceci consiste en un homomorphisme  $\bar{\rho}^\bullet : \pi_1(\bar{X}, \infty) \rightarrow \Theta_{\bar{\rho}}$  qui relève  $\bar{\rho}_G^\bullet : \pi_1(\bar{X}, \infty) \rightarrow \text{Out}(\mathbb{G})$ . Cet homomorphisme détermine un revêtement fini étale galoisien  $\bar{\rho} : \bar{X}_{\bar{\rho}} \rightarrow \bar{X}$  de groupe de Galois  $\Theta_{\bar{\rho}}$  muni d'un point  $\infty_{\bar{\rho}} \in \bar{X}_{\bar{\rho}}$  au-dessus de  $\infty$ . On a alors un revêtement fini et plat

$$\pi_{\bar{\rho}} : \bar{X}_{\bar{\rho}} \times \mathfrak{t} \rightarrow \bar{\mathfrak{c}}_D$$

qui au-dessus de l'ouvert  $\bar{\mathfrak{c}}_D^{\text{rs}}$  est fini étale galoisien de groupe de Galois  $\mathbb{W} \rtimes \Theta_{\bar{\rho}}$ .

Soit  $a \in \mathcal{A}^\infty(\bar{k})$ . Considérons le revêtement fini et plat  $\pi_{\bar{\rho},a} : \tilde{X}_{\bar{\rho},a} \rightarrow \bar{X}$  défini en formant le produit cartésien 4.5.3. Génériquement, c'est un revêtement fini étale galoisien de groupe de Galois  $\mathbb{W} \rtimes \Theta_{\bar{\rho}}$ . Par construction, il est fini et étale au-dessus de  $\infty$ . Choisissons un point  $\tilde{\infty}_{\bar{\rho}}$  de  $\tilde{X}_{\bar{\rho},a}$  au-dessus de  $\infty_{\bar{\rho}}$ . Ce choix permet d'identifier la fibre de  $J_a = a^*J$  au-dessus de  $\infty$  avec le tore fixe  $\mathbb{T}$  à l'aide de 2.4.4.

Soit  $\tilde{X}_{\bar{\rho},a}^b$  la normalisation de  $\tilde{X}_{\bar{\rho},a}$ . Puisque  $\tilde{\infty}_{\bar{\rho}}$  est un point lisse de  $\tilde{X}_{\bar{\rho},a}$ , il détermine un point de sa normalisation. Notons  $\tilde{a} = (a, \tilde{\infty}_{\bar{\rho}})$ . Soit  $C_{\tilde{a}}$  la composante de  $\tilde{X}_{\bar{\rho},a}^b$  qui contient le point  $\tilde{\infty}$ . Soit  $W_{\tilde{a}}$  le sous-groupe de  $\mathbb{W} \rtimes \Theta_{\bar{\rho}}$  qui laisse stable cette composante. Considérons aussi le sous-groupe normal  $I_{\tilde{a}}$  de  $W_{\tilde{a}}$  engendré par les éléments de  $W_{\tilde{a}}$  ayant au moins un point fixe dans  $C_{\tilde{a}}$ .

Soit  $J_a^0$  le sous-schéma en groupes des composantes neutres de  $J_a$ . Considérons le champ de Picard  $\mathcal{P}'_a$  des  $J_a^0$ -torseurs sur  $\bar{X}$ . L'homomorphisme de faisceaux  $J_a^0 \rightarrow J_a$  induit un homomorphisme de champs de Picard  $\mathcal{P}'_a \rightarrow \mathcal{P}_a$ .

**Lemme 4.10.1.** — *L'homomorphisme  $\mathcal{P}'_a \rightarrow \mathcal{P}_a$  est surjectif et a un noyau fini. Il en est de même de l'homomorphisme  $\pi_0(\mathcal{P}'_a) \rightarrow \pi_0(\mathcal{P}_a)$  qui s'en déduit.*

*Démonstration.* — On a une suite exacte courte de faisceaux

$$0 \rightarrow J_a^0 \rightarrow J_a \rightarrow \pi_0(J_a) \rightarrow 0$$

où  $\pi_0(J_a)$  est un faisceau de support fini dont la fibre en un point  $v \in \bar{X}$  est le groupe  $\pi_0(J_a)_v$  des composantes connexes de la fibre  $J_{a,v}$  de  $J_a$ . On en déduit une suite exacte longue

$$H^0(\bar{X}, \pi_0(J_a)) \rightarrow H^1(\bar{X}, J_a^0) \rightarrow H^1(\bar{X}, J_a) \rightarrow H^1(\bar{X}, \pi_0(J_a)) = 0.$$

L'annulation du dernier terme résulte du fait que  $\pi_0(J_a)$  est supporté par un schéma de dimension zéro. On en déduit la surjectivité de  $\mathcal{P}'_a \rightarrow \mathcal{P}_a$  de noyau  $H^0(\bar{X}, \pi_0(J_a))$ . La finitude de ce noyau vient de la finitude des fibres de  $\pi_0(J_a)$ . L'assertion sur  $\pi_0(\mathcal{P}'_a) \rightarrow \pi_0(\mathcal{P}_a)$  s'en suit immédiatement.  $\square$

Au lieu des groupes abéliens  $\pi_0(\mathcal{P}'_a)$  et  $\pi_0(\mathcal{P}_a)$ , il sera plus commode de décrire les groupes diagonalisables duaux. Dualelement, on a une inclusion des groupes diagonalisables

$$\pi_0(\mathcal{P}_a)^* \subset \pi_0(\mathcal{P}'_a)^*.$$

où on a noté

$$\begin{aligned} \pi_0(\mathcal{P}_a)^* &= \text{Spec}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell[\pi_0(\mathcal{P}_a)]) \\ \pi_0(\mathcal{P}'_a)^* &= \text{Spec}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell[\pi_0(\mathcal{P}'_a)]). \end{aligned}$$

On utilisera l'exposant  $(-)^*$  pour désigner la dualité entre les groupes abéliens de type fini et les groupes diagonalisables de type fini sur  $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ .

**Proposition 4.10.2.** — *Pour tout  $\tilde{a} = (a, \tilde{\omega}_{\tilde{\rho}})$  comme ci-dessus, on a des isomorphismes de groupes diagonalisables*

$$\pi_0(\mathcal{P}'_a)^* = \hat{\mathbb{T}}^{W_{\tilde{a}}}$$

et

$$\pi_0(\mathcal{P}_a)^* = \hat{\mathbb{T}}(I_{\tilde{a}}, W_{\tilde{a}})$$

où  $\hat{\mathbb{T}}(I_{\tilde{a}}, W_{\tilde{a}})$  est le sous-groupe de  $\hat{\mathbb{T}}^{W_{\tilde{a}}}$  formé des éléments  $\kappa$  tels que  $W_{\tilde{a}} \subset (\mathbb{W} \rtimes \Theta_{\tilde{\rho}})_\kappa$  et  $I_{\tilde{a}} \subset \mathbb{W}_{\mathbb{H}}$  où  $\mathbb{W}_{\mathbb{H}}$  est le groupe de Weyl de la composante neutre du centralisateur de  $\kappa$  dans  $\hat{\mathbb{G}}$ .

*Démonstration.* — D'après [55, corollaire 6.7], on a un isomorphisme canonique

$$(\mathbb{X}_*)_{W_{\bar{a}}} \longrightarrow \pi_0(\mathcal{P}'_a)$$

du groupe des  $W_{\bar{a}}$ -coinvariants de  $\mathbb{X}_* = \text{Hom}(\mathbb{G}_m, \mathbb{T})$  dans le groupe des composantes connexes de  $\mathcal{P}'_a$ . Ceci est essentiellement un cas particulier d'un lemme de Kottwitz [39, lemme 2.2]. Dualement, on a un isomorphisme de groupes diagonalisables

$$\pi_0(\mathcal{P}'_a)^* = \hat{\mathbb{T}}^{W_{\bar{a}}}$$

où  $\hat{\mathbb{T}}$  est le  $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -tore dual de  $\mathbb{T}$ .

Notons  $U = a^{-1}(\bar{\mathfrak{c}}_D^{\text{rs}})$ . Comme dans la démonstration de 4.10.1, on a une suite exacte

$$H^0(\bar{X}, \pi_0(J_a)) \rightarrow \pi_0(\mathcal{P}'_a) \rightarrow \pi_0(\mathcal{P}_a) \rightarrow 0$$

où  $H^0(\bar{X}, J_a/J_a^0) = \bigoplus_{v \in \bar{X} - U} \pi_0(J_{a,v})$  où  $\pi_0(J_{a,v})$  désigne le groupe des composantes connexes de la fibre de  $J_a$  en  $v$ . Pour tout  $v \in \bar{X} - U$ , on a une suite exacte locale analogue

$$\pi_0(J_{a,v}) \rightarrow \pi_0(\mathcal{P}_v(J_a^0)) \rightarrow \pi_0(\mathcal{P}_v(J_a)) \rightarrow 0$$

compatible avec la suite globale. Considérons les suites duales des groupes diagonalisables

$$0 \rightarrow \pi_0(\mathcal{P}_v(J_a))^* \rightarrow \pi_0(\mathcal{P}_v(J_a^0))^* \rightarrow \pi_0(J_{a,v})^*$$

Le sous-groupe

$$\pi_0(\mathcal{P}_a)^* \subset \pi_0(\mathcal{P}'_a)^*$$

est alors l'intersection des images inverses des sous-groupes

$$\pi_0(\mathcal{P}_v(J_a))^* \subset \pi_0(\mathcal{P}_v(J_a^0))^*$$

pour tout  $v \in \bar{X} - U$ . La proposition se déduit maintenant de 3.9.2.  $\square$

**4.11. Automorphismes.** — Soit  $(E, \phi) \in \mathcal{M}(\bar{k})$  d'image  $a \in \mathcal{A}^\heartsuit(\bar{k})$ . Nous allons déterminer des bornes pour le groupe des automorphismes  $\text{Aut}(E, \phi)$  en fonction de  $a$ . Soit  $U$  l'ouvert  $\bar{X}$  où  $a$  est semi-simple régulier.

Considérons le faisceau des automorphismes  $\underline{\text{Aut}}(E, \phi)$  qui associe à tout  $\bar{X}$ -schéma  $S$  le groupe  $\text{Aut}((E, \phi)|_S)$ . Ce faisceau est représentable par le schéma en groupes  $I_{(E, \phi)} = h_{(E, \phi)}^* I$  qui est l'image réciproque du centralisateur  $I$  sur  $\mathfrak{g}$  par la flèche  $h_{(E, \phi)} : \bar{X} \rightarrow [\mathfrak{g}_D/G]$ . La restriction de  $I_{(E, \phi)}$  à l'ouvert  $U$  est un tore mais au-dessus de  $\bar{X}$ , le schéma en groupes  $I_{(E, \phi)}$  n'est ni lisse ni même plat. On peut néanmoins considérer

sa lissification au sens de [9]. D'après *loc. cit*, il existe un unique schéma en groupes lisse  $I_{(E,\phi)}^{\text{lis}}$  au-dessus de  $\bar{X}$  tel que pour tout  $\bar{X}$ -schéma  $S$  lisse on a

$$\text{Aut}((E, \phi)|_S) = \text{Hom}_X(S, I_{(E,\phi)}^{\text{lis}}).$$

La flèche tautologique  $I_{(E,\phi)}^{\text{lis}} \rightarrow I_{(E,\phi)}$  est un isomorphisme au-dessus de l'ouvert  $U$ . Notons que la caractérisation de  $I_{(E,\phi)}^{\text{lis}}$  implique l'égalité

$$(4.11.1) \quad \text{Aut}(E, \phi) = H^0(\bar{X}, I_{(E,\phi)}^{\text{lis}}).$$

Puisque  $J_a$  est lisse, l'homomorphisme canonique  $J_a \rightarrow I_{(E,\phi)}$  induit un homomorphisme

$$J_a \rightarrow I_{(E,\phi)}^{\text{lis}}$$

qui est un isomorphisme au-dessus de  $U$ . Par la propriété universelle du modèle de Néron, on a un homomorphisme

$$I_{(E,\phi)}^{\text{lis}} \rightarrow J_a^b$$

qui est un isomorphisme sur  $U$ .

**Proposition 4.11.2.** — *Pour tout  $(E, \phi) \in \mathcal{M}(\bar{k})$  au-dessus d'un point  $a \in \mathcal{A}^\heartsuit(\bar{k})$ , on a des inclusions canoniques*

$$H^0(\bar{X}, J_a) \subset \text{Aut}(E, \phi) \subset H^0(\bar{X}, J_a^b).$$

*Démonstration.* — Il suffit de vérifier que les flèches  $J_a \rightarrow I_{(E,\phi)}^{\text{lis}}$  et  $I_{(E,\phi)}^{\text{lis}} \rightarrow J_a^b$  sont injectifs en tant qu'homomorphismes de faisceaux pour la topologie étale. Pour cela, il suffit de vérifier l'injectivité sur les voisinages formels en chaque point  $v \in \bar{X} - U$ . Notons  $\bar{\mathcal{O}}_v$  le complété formel de  $\mathcal{O}_{\bar{X}}$  en  $v$  et  $\bar{F}_v$  le corps des fractions de  $\bar{\mathcal{O}}_v$ . On a alors les inclusions

$$J_a(\bar{\mathcal{O}}_v) \subset I_{(E,\phi)}^{\text{lis}}(\bar{\mathcal{O}}_v) \subset J_a^b(\bar{\mathcal{O}}_v)$$

de sous-groupes de  $J_a(\bar{F}_v)$ . □

Pour décrire explicitement la borne supérieure  $H^0(\bar{X}, J_a^b)$ , faisons des choix comme dans le paragraphe précédent. En particulier, on a un point  $\infty \in X(\bar{k})$  tel que  $a(\infty) \in \bar{\mathfrak{c}}_D^{\text{rs}}$ . On choisit aussi un déploiement  $\bar{\rho} : \bar{X}_{\bar{\rho}} \rightarrow \bar{X}$  de groupe de Galois  $\Theta_{\bar{\rho}}$  avec un point  $\infty_{\bar{\rho}}$  cf. 1.3.10. On a alors un revêtement fini plat  $\pi_{\bar{\rho},a} : \tilde{X}_{\bar{\rho},a} \rightarrow \bar{X}$  qui est génériquement étale galoisien de groupe de Galois  $\mathbb{W} \rtimes \Theta_{\bar{\rho}}$ . En choisissant un point  $\tilde{\infty}_{\bar{\rho}}$  de  $\tilde{X}_{\bar{\rho},a}$  au-dessus de  $\infty$ , on définit un sous-groupe  $W_{\tilde{a}}$  de  $\mathbb{W} \rtimes \Theta_{\bar{\rho}}$  et un sous-groupe



normal  $I_{\tilde{a}}$  de  $W_{\tilde{a}}$  comme dans le paragraphe 4.10. Avec 4.8.1 et 2.4.4, on a la formule

$$H^0(\bar{X}, J_a^b) = \mathbb{T}^{W_{\tilde{a}}}.$$

On en déduit le corollaire suivant.

**Corollaire 4.11.3.** — *Soit  $\tilde{a} = (a, \tilde{\infty})$  comme ci-dessus. Pour tout  $(E, \phi) \in \mathcal{M}(\bar{k})$  au-dessus d'un point  $a \in \mathcal{A}^\heartsuit(\bar{k})$ ,  $\text{Aut}(E, \phi)$  s'identifie à un sous-groupe de  $\mathbb{T}^{W_{\tilde{a}}}$ .*

Les travaux récents de Frenkel et Witten suggèrent que cette borne n'est pas optimale. En fait, on devrait avoir l'inclusion

$$\text{Aut}(E, \phi) \subset \mathbb{T}(I_{\tilde{a}}, W_{\tilde{a}})$$

où  $\mathbb{T}(I_{\tilde{a}}, W_{\tilde{a}})$  est le sous-groupe de  $\mathbb{T}^{W_{\tilde{a}}}$  défini comme dans 4.10.2 en remplaçant  $\hat{\mathbb{T}}$  par  $\mathbb{T}$ . De plus, l'égalité devrait être atteinte aux points les plus singuliers de la fibre  $\mathcal{M}_a$ .

Soit  $\mathcal{A}^{\text{ani}}(\bar{k})$  le sous-ensemble des points  $a \in \mathcal{A}(\bar{k})$  tels que  $\mathbb{T}^{W_{\tilde{a}}}$  soit fini. Cette propriété ne dépend pas du choix du point  $\tilde{\infty}$ . On démontrera plus loin qu'il existe un ouvert  $\mathcal{A}^{\text{ani}}$  de  $\mathcal{A}$  dont  $\mathcal{A}^{\text{ani}}(\bar{k})$  est l'ensemble des  $\bar{k}$ -points. Au-dessus de cet ouvert,  $\mathcal{M}$  est alors un champ de Deligne-Mumford.

Calculons enfin le groupe des automorphismes des points de  $\mathcal{P}_a$ .

**Proposition 4.11.4.** — *Fixons un déploiement  $\bar{\rho} : \bar{X}_{\bar{\rho}} \rightarrow \bar{X}$  de groupe de Galois  $\Theta_{\bar{\rho}}$  avec  $\bar{X}_{\bar{\rho}}$  connexe. Pour tout  $a \in \mathcal{A}^\heartsuit(\bar{k})$ , on a*

$$H^0(\bar{X}, J_a) = (Z\mathbb{G})^{\mathbb{W} \rtimes \Theta_{\bar{\rho}}}$$

et

$$H^0(\bar{X}, \text{Lie}(J_a)) = \text{Lie}(Z\mathbb{G})^{\mathbb{W} \rtimes \Theta_{\bar{\rho}}}.$$

*En particulier, si au-dessus de  $\bar{X}$  le centre de  $G$  ne contient pas de tore déployé, alors  $\mathcal{P}_a$  est un champ de Picard de Deligne-Mumford.*

*Démonstration.* — On dispose d'un homomorphisme canonique de faisceaux  $Z\mathbb{G} \rightarrow J_a$  sur  $\bar{X}$ . Il s'agit donc de démontrer que la flèche induite sur les sections globales est un isomorphisme. D'après 2.4.7, on a un homomorphisme injectif de faisceaux  $J_a \rightarrow J_a^1$  de conoyau fini. De plus,  $J_a^1$  est déterminé par le revêtement caméral  $\pi_a : \tilde{X}_{\bar{\rho}, a} \rightarrow \bar{X}$  avec la formule

$$J_a^1 = ((\pi_a)_*(\mathbb{T} \times \tilde{X}_{\bar{\rho}, a}))^{\mathbb{W} \rtimes \Theta_{\bar{\rho}}}.$$

Puisque  $\tilde{X}_{\bar{\rho},a}$  est connexe *cf.* 4.5.4, on a

$$H^0(\bar{X}, J_a^1) = \mathbb{T}^{\mathbb{W} \rtimes \Theta_{\bar{\rho}}}.$$

Le fait que le sous-groupe  $H^0(\bar{X}, J_a)$  de  $H^0(\bar{X}, J_a^1)$  s'identifie à  $(Z\mathbb{G})^{\mathbb{W} \rtimes \Theta_{\bar{\rho}}}$  se déduit de la description explicite du sous-faisceau  $J'$  de  $J^1$  dans la proposition 2.4.7.  $\square$

**4.12. Calcul de déformation.** — Les déformations des fibrés de Higgs ont été étudiées par Biswas et Ramanan dans [8]. Pour la commodité du lecteur, nous allons reprendre leur calcul.

Rappelons d'abord le calcul usuel des déformations d'un toreur sous un groupe lisse. Soient  $S$  un  $k$ -schéma et  $G$  un  $S$ -schéma en groupes lisse. Soit  $\mathbf{B}G$  le classifiant de  $G$ . Le  $G$ -torseur universel  $\mathbf{E}G$  est alors  $S$  au-dessus de  $[S/G]$ . Notons

$$\pi_{\mathbf{E}G} : \mathbf{E}G \longrightarrow \mathbf{B}G$$

le  $G$ -torseur tautologique. Considérons le triangle distingué des complexes cotangents

$$\pi_{\mathbf{E}G}^* L_{\mathbf{B}G/S} \longrightarrow L_{\mathbf{E}G/S} \longrightarrow L_{\mathbf{E}G/\mathbf{B}G} \longrightarrow \pi_{\mathbf{E}G}^* L_{\mathbf{B}G/S}[1].$$

Puisque  $S = \mathbf{E}G$ , le complexe cotangent  $L_{\mathbf{E}G/S}$  est nul alors que  $L_{\mathbf{E}G/\mathbf{B}G}$  est le fibré vectoriel  $\mathfrak{g}^*$  placé en degré 0. Il en résulte un isomorphisme

$$L_{\mathbf{E}G/\mathbf{B}G} \xrightarrow{\sim} \pi_{\mathbf{E}G}^* L_{\mathbf{B}G/S}[1].$$

On en déduit un isomorphisme

$$\mathfrak{g}^*[-1] \xrightarrow{\sim} \pi_{\mathbf{E}G}^* L_{\mathbf{B}G/S}$$

qui par descente le long de  $\pi_{\mathbf{E}G}$  induit un isomorphisme

$$(\mathbf{E}G \wedge^G \mathfrak{g}^*)[-1] \xrightarrow{\sim} L_{\mathbf{B}G/S}.$$

Le complexe cotangent  $L_{\mathbf{B}G/k}$  du classifiant de  $G$  est donc le fibré vectoriel obtenu en tordant par le toreur  $\mathbf{E}G$  l'espace vectoriel  $\mathfrak{g}^*$  muni de la représentation coadjointe, placé en degré 1.

Ainsi, pour tout  $S$ -schéma  $X$ , pour tout  $G$ -torseur  $E$  sur  $X$  correspondant à une flèche  $h_E : X \rightarrow \mathbf{B}G$ , l'obstruction à la déformation de  $E$  gît dans le groupe

$$H^1(X, \underline{\mathrm{RHom}}(h_E^* L_{\mathbf{B}G/S}, \mathcal{O}_X)) = H^2(X, E \wedge^G \mathfrak{g})$$

et si cette obstruction s'annule, les déformations forment un espace principal homogène sous le groupe

$$H^0(X, \underline{\mathrm{RHom}}(h_E^* L_{\mathbf{B}G/S}, \mathcal{O}_X)) = H^1(X, E \wedge^G \mathfrak{g})$$

alors que le groupe des automorphismes infinitésimaux est  $H^0(X, E \wedge^G \mathfrak{g})$ .

Soit maintenant  $V$  un fibré vectoriel sur  $S$  muni d'une action de  $G$  et considérons le champ quotient  $[V/G]$ . Le  $G$ -torseur  $\pi_V : V \rightarrow [V/G]$  définit un morphisme  $[\nu] : [V/G] \rightarrow \mathbf{B}G$  qui s'insère dans un diagramme cartésien

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\nu} & \mathbf{E}G \\ \pi_V \downarrow & & \downarrow \pi_{\mathbf{E}G} \\ [V/G] & \xrightarrow{[\nu]} & \mathbf{B}G \end{array}$$

Considérons le triangle distingué des complexes cotangents

$$\pi_V^* L_{[V/G]/S} \longrightarrow L_{V/S} \longrightarrow L_{V/[V/G]} \longrightarrow \pi_V^* L_{[V/G]/k}[1].$$

Le terme  $L_{V/S}$  est fibré vectoriel constant de valeur  $\nu^* V^*$  placé en degré 0 où  $V^*$  est le  $S$ -fibré vectoriel dual de  $V$  et  $\nu : V \rightarrow S$  est la projection sur  $S$ . Le terme  $L_{V/[V/G]}$  se calcule par changement de base  $L_{V/[V/G]} = \nu^* L_{\mathbf{E}G/\mathbf{B}G}$  et est donc le fibré vectoriel  $\nu^* \mathfrak{g}^*$  placé aussi en degré 0. Au-dessus de chaque point  $v \in V$ , l'action de  $G$  au voisinage de  $v$  définit une application linéaire

$$\alpha_v : \mathfrak{g} \longrightarrow T_v V = V$$

dont le dual est la fibre en  $v$

$$\alpha_v^* : (L_{V/S})_v = V^* \longrightarrow (L_{V/[V/G]})_v = \mathfrak{g}^*.$$

de la flèche  $L_{V/k} \rightarrow L_{V/[V/G]}$  du triangle distingué. Cette flèche descend à  $[V/G]$  en une flèche

$$\alpha_v^* \wedge^G \pi_V : \pi_V \wedge^G V^* \longrightarrow \pi_V \wedge^G \mathfrak{g}^*$$

dont le cône est isomorphe à  $L_{[V/G]/S}$ .

Appliquons le calcul ci-dessus pour calculer les déformations des paires de Hitchin. Reprenons les notations fixées au début du chapitre 3. En particulier,  $G$  est le schéma en groupes réductif sur la courbe  $X$  et  $\mathfrak{g}$  son algèbre de Lie qui est munie de l'action adjointe de  $G$  et de l'action de  $\mathbb{G}_m$  par homothétie. Le fibré inversible  $D$  définit un  $\mathbb{G}_m$  toseur  $L_D$ .

Considérons le champ  $[\mathfrak{g}_D/G]$  obtenu en tordant  $\mathfrak{g}$  par  $L_D$  puis divisé par  $G$ . Le complexe cotangent  $L_{[\mathfrak{g}_D/G]/X}$  s'identifie donc à

$$L_{[\mathfrak{g}/G]/X} \wedge^{\mathbb{G}_m} L_D$$

qui est le cône de

$$(\pi_{D,\mathfrak{g}} \wedge^G \mathfrak{g}^*) \otimes D^{-1} \longrightarrow \pi_{D,\mathfrak{g}} \wedge^G \mathfrak{g}^*$$

où  $\pi_{D,\mathfrak{g}}$  est le  $G$ -torseur évident sur le quotient  $[\mathfrak{g}_D/G]$ .

Soit  $(E, \phi)$  un champ de Higgs sur  $X$  à valeur dans  $k$ . Elle correspond à une flèche

$$h_{E,\phi} : \bar{X} \rightarrow [\mathfrak{g}_D/G].$$

La déformation de  $(E, \phi)$  est contrôlée par le complexe

$$\underline{\mathrm{RHom}}(h_{E,\phi}^*(L_D \wedge^{\mathbb{G}_m} L_{[\mathfrak{g}/G]/X}), \mathcal{O}_X)$$

qui s'exprime maintenant simplement

$$\mathrm{ad}(E, \phi) := [\mathrm{ad}(E) \rightarrow \mathrm{ad}(E) \otimes D]$$

où

- $\mathrm{ad}(E)$  est le fibré vectoriel  $\mathfrak{g} \wedge^G E$  ;
- $\mathrm{ad}(E)$  est placé en degré  $-1$  en  $\mathrm{ad}(E) \otimes D$  est placé en degré  $0$  ;
- la flèche est donnée par  $x \mapsto [x, \phi]$ .

Rappelons la proposition 5.3 de [55]. Le lecteur notera une différence dans le décalage de  $\mathrm{ad}(E, \phi)$  par rapport à *loc. cit.* Nous donnerons ici une démonstration un peu différente.

**Théorème 4.12.1.** — *Soit  $(E, \phi) \in \mathcal{M}(\bar{k})$  un point au-dessus d'un point  $a \in \mathcal{A}^\heartsuit(\bar{k})$ . Alors le groupe  $H^1(X, \mathrm{ad}(E, \phi))$  où gît l'obstruction à la déformation de la paire  $(E, \phi)$  est nul dans l'un des cas suivants*

- $\deg(D) > 2g - 2$  ,
- $\deg(D) = 2g - 2$  et  $a \in \mathcal{A}^{\mathrm{ani}}(\bar{k})$ .

*Si l'une de ces deux hypothèses sont vérifiées, alors  $\mathcal{M}$  est lisse au point  $(E, \phi)$ .*

*Démonstration.* — Fixons une forme symétrique non dégénérée et invariante sur  $\mathfrak{g}$ . On identifie alors le dual du complexe  $\mathrm{ad}(E, \phi)$  à

$$\mathrm{ad}(E, \phi)^* = [\mathrm{ad}(E) \otimes D^{-1} \rightarrow \mathrm{ad}(E)]$$

dont les deux termes non nuls sont placés en degrés  $-1$  et  $0$  et dont la différentielle est donnée par  $x \mapsto [x, \phi]$ . Le faisceau de cohomologie  $H^{-1}$  de ce complexe s'identifie à

$$\mathrm{Lie}(I_{E,\phi}^{\mathrm{lis}}) \otimes D^{-1}$$

où  $I_{E,\phi}^{\mathrm{lis}}$  est le schéma en groupes lisse sur  $\bar{X}$  introduit dans le paragraphe 4.11. Par dualité de Serre, le groupe  $H^1(X, \mathrm{ad}(E, \phi))$  est dual du groupe

$$H^0(\bar{X}, \mathrm{Lie}(I_{E,\phi}^{\mathrm{lis}}) \otimes D^{-1} \otimes \Omega_{X/k}).$$

Comme dans 4.11, on a un homomorphisme injectif de  $\mathcal{O}_{\bar{X}}$ -modules

$$\mathrm{Lie}(I_{E,\phi}^{\mathrm{lis}}) \rightarrow \mathrm{Lie}(J_a^{\flat})$$

de sorte que pour démontrer la nullité du groupe des obstructions envisagée, il suffit de démontrer que

$$H^0(\bar{X}, \mathrm{Lie}(J_a^{\flat}) \otimes D^{-1} \otimes \Omega_{X/k}) = 0.$$

On est donc amené à démontrer le lemme suivant. □

**Lemme 4.12.2.** — *Pour tout  $a \in \mathcal{A}^{\heartsuit}(\bar{k})$ ,  $H^0(\bar{X}, \mathrm{Lie}(J_a^{\flat}) \otimes L) = 0$  pour tout fibré en droite  $L$  de degré strictement négatif. La même conclusion vaut sous l'hypothèse  $a \in \mathcal{A}^{\mathrm{ani}}(\bar{k})$  et  $\deg(L) \leq 0$ .*

*Démonstration.* — Choisissons un déploiement  $\bar{\rho} : \bar{X}_{\bar{\rho}} \rightarrow \bar{X}$  connexe de  $G$  cf. 1.3.10. On a alors un revêtement fini plat  $\tilde{X}_{\bar{\rho},a} \rightarrow \bar{X}$  qui est génériquement étale galoisien de groupe de Galois  $\mathbb{W} \rtimes \Theta_{\bar{\rho}}$ . Notons  $\tilde{X}_{\bar{\rho},a}^{\flat}$  la normalisation de  $\tilde{X}_{\bar{\rho},a} \rightarrow \bar{X}$  et  $\pi_{\bar{\rho},a}^{\flat}$  la projection sur  $\bar{X}$ . D'après 4.8.1,  $\mathrm{Lie}(J_a^{\flat})$  peut être calculé à partir de  $\tilde{X}_{\bar{\rho},a}^{\flat}$  avec la formule

$$\mathrm{Lie}(J_a^{\flat}) = (\pi_{\bar{\rho},a}^{\flat})_*(\mathcal{O}_{\tilde{X}_{\bar{\rho},a}^{\flat}} \otimes \mathfrak{t})^{\mathbb{W} \rtimes \Theta_{\bar{\rho}}}$$

de sorte que

$$\mathrm{Lie}(J_a^{\flat}) \otimes L = (\pi_a^{\flat})_*((\pi_a^{\flat})^*L \otimes \mathfrak{t})^{\mathbb{W} \rtimes \Theta_{\bar{\rho}}}.$$

Si  $\deg(L) < 0$ ,  $(\pi_a^{\flat})^*L$  est un fibré en droites de degré strictement négatif sur chaque composante connexe de  $\tilde{X}_{\bar{\rho},a}^{\flat}$  et ne peut pas avoir de sections globales non nulles.

Si  $\deg(L) = 0$ , si  $(\pi_a^{\flat})^*L$  a de sections globales non nulles si et seulement s'il est isomorphe à  $\mathcal{O}_{\tilde{X}_{\bar{\rho},a}^{\flat}}$ . On a dans ce cas

$$H^0(\tilde{X}_{\bar{\rho},a}^{\flat}, ((\pi_{\bar{\rho},a}^{\flat})^*L \otimes \mathfrak{t})^{\mathbb{W} \rtimes \Theta_{\bar{\rho}}}) = \mathfrak{t}^{W_{\bar{a}}}$$

où  $W_{\bar{a}}$  est le sous-groupe de  $\mathbb{W} \rtimes \Theta_{\bar{\rho}}$  défini comme dans le paragraphe 4.10 et qui dépend du choix d'un point  $\widetilde{\infty}$  de  $\widetilde{X}_a^b$ . Sous l'hypothèse  $a \in \mathcal{A}^{\text{ani}}(\bar{k})$ , le groupe des  $W_{\bar{a}}$ -invariants  $\mathbb{t}^{W_{\bar{a}}}$  est nul.  $\square$

**4.13. Formule de produit.** — Nous allons à présent rappeler le lien entre les fibres de Hitchin et les fibres de Springer affines qui en sont des analogues locaux.

Soit  $a \in \mathcal{A}^{\vee}(\bar{k})$ . Soit  $U$  l'image réciproque de l'ouvert régulier semi-simple  $\mathfrak{c}^{\text{rs}}$  de  $\mathfrak{c}$  par le morphisme  $a : \bar{X} \rightarrow [\mathfrak{c}/\mathbb{G}_m]$ . Le recollement avec la section de Kostant définit un morphisme

$$\prod_{v \in \bar{X} - U} \mathcal{M}_v(a) \rightarrow \mathcal{M}_a.$$

De même, on a un homomorphisme de groupes  $\prod_{v \in \bar{X} - U} \mathcal{P}_v(J_a) \rightarrow \mathcal{P}_a$ . Ceux-ci induisent un morphisme

$$\zeta : \prod_{v \in \bar{X} - U} \mathcal{M}_v(a) \wedge^{\prod_{v \in \bar{X} - U} \mathcal{P}_v(J_a)} \mathcal{P}_a \rightarrow \mathcal{M}_a.$$

D'après le théorème 4.6 de [55], ce morphisme induit une équivalence sur la catégorie des  $\bar{k}$ -points. Le lecteur remarquera des changements de notations par rapport à *loc. cit.* :  $\mathcal{M}_v(a)$  y était désigné par  $\mathcal{M}_{v,a}^{\bullet}$  et ce qui y était désigné par  $\mathcal{M}_{v,a}$  n'apparaîtra plus ici.

**Proposition 4.13.1.** — *Pour tout  $a \in \mathcal{A}^{\text{ani}}(\bar{k})$ , le quotient de*

$$\prod_{v \in \bar{X} - U} \mathcal{M}_v^{\text{red}}(a) \times \mathcal{P}_a$$

*par l'action diagonale de  $\prod_{v \in \bar{X} - U} \mathcal{P}_v^{\text{red}}(J_a)$  est un champ de Deligne-Mumford propre. De plus, le morphisme*

$$\prod_{v \in \bar{X} - U} \mathcal{M}_v^{\text{red}}(a) \wedge^{\prod_{v \in \bar{X} - U} \mathcal{P}_v^{\text{red}}(J_a)} \mathcal{P}_a \rightarrow \mathcal{M}_a$$

*est un homéomorphisme.*

*Démonstration.* — L'homomorphisme  $\mathcal{P}_v(J_a) \rightarrow \mathcal{P}_a$  induit un homomorphisme  $\pi_0(\mathcal{P}_v(J_a)) \rightarrow \pi_0(\mathcal{P}_a)$  sur les groupes des composantes connexes. Puisque  $a \in \mathcal{A}^{\text{ani}}(\bar{k})$ ,  $\pi_0(\mathcal{P}_a)$  est un groupe fini, le noyau de cet homomorphisme est un sous-groupe d'indice finie de  $\pi_0(\mathcal{P}_v(J_a))$ . Il existe donc un sous-groupe abélien libre d'indice finie  $\Lambda_v$  de  $\pi_0(\mathcal{P}_v(J_a))$  contenu dans ce noyau.

Choisissons un relèvement  $\Lambda_v \rightarrow \mathcal{P}_v(J_a)$ . Puisque  $a$  est défini sur un corps fini, quitte à remplacer  $\Lambda_v$  par un sous-groupe d'indice finie, on peut supposer que  $\Lambda_v$  est contenu dans le noyau de  $\mathcal{P}_v(J_a) \rightarrow \mathcal{P}_a$ .

Le groupe  $\prod_{v \in \bar{X}-U} \Lambda_v$  agit sur  $\prod_{v \in \bar{X}-U} \mathcal{M}_v^{\text{red}}(a) \times \mathcal{P}_a$  en agissant librement sur le premier facteur et trivialement sur le second facteur. Le quotient est

$$\prod_{v \in \bar{X}-U} (\mathcal{M}_v^{\text{red}}(a)/\Lambda_v) \times \mathcal{P}_a$$

où chaque  $\mathcal{M}_v^{\text{red}}(a)/\Lambda_v$  est un  $\bar{k}$ -schéma projectif d'après Kazhdan et Lusztig *cf.* 3.4.1.

Il reste à quotienter par  $\prod_{v \in \bar{X}-U} (\mathcal{P}_v(J_a)/\Lambda_v)$ . Pour tout  $v$ , l'homomorphisme  $\mathcal{R}_v(a) \rightarrow \mathcal{P}_v(J_a)/\Lambda_v$  est injectif et de noyau fini. Rappelons qu'on a une suite exacte

$$1 \rightarrow \mathcal{R}_a \rightarrow \mathcal{P}_a \rightarrow \mathcal{P}_a^b \rightarrow 1$$

où  $\mathcal{P}_a^b$  est un champ de Deligne-Mumford propre. Le quotient de

$$\prod_{v \in \bar{X}-U} (\mathcal{M}_v^{\text{red}}(a)/\Lambda_v) \times \mathcal{P}_a$$

par l'action diagonale de  $\mathcal{R}_a = \prod_v \mathcal{R}_v(a)$  est donc une fibration localement triviale au-dessus de  $\mathcal{P}_a^b$  de fibres isomorphes à

$$\prod_{v \in \bar{X}-U} (\mathcal{M}_v^{\text{red}}(a)/\Lambda_v).$$

Ce quotient est donc un champ de Deligne-Mumford propre.

Il reste donc à quotienter par le groupe fini  $\prod_v \mathcal{P}_v(J_a)/(\mathcal{R}_v(a) \times \Lambda_v)$ . Le quotient final est aussi un champ de Deligne-Mumford propre.

Puisque  $\mathcal{M}_a$  est un champ de Deligne-Mumford, en particulier séparé, le morphisme

$$\zeta : \prod_{v \in \bar{X}-U} \mathcal{M}_v^{\text{red}}(a) \wedge^{\prod_{v \in \bar{X}-U} \mathcal{P}_v^{\text{red}}(J_a)} \mathcal{P}_a \rightarrow \mathcal{M}_a$$

est un morphisme propre. Puisqu'il induit une équivalence sur les  $\bar{k}$ -points, c'est donc un homéomorphisme. En particulier,  $\mathcal{M}_a$  est un champ de Deligne-Mumford propre.  $\square$

On s'attend à ce que l'énoncé ci-dessus s'étend à  $a \in \mathcal{A}^\heartsuit(\bar{k})$ .

**4.14. Densité.** — On va maintenant énoncer et démontrer l'analogue global de 3.10.1.

**Proposition 4.14.1.** — *Pour tout point géométrique  $a \in \mathcal{A}^\vee(\bar{k})$ , la fibre  $\mathcal{M}_a^{\text{reg}}$  est dense dans la fibre  $\mathcal{M}_a$ .*

*Démonstration.* — La formule de produit 4.13.1 implique que le fermé complémentaire  $\mathcal{M}_a^{\text{reg}}$  dans  $\mathcal{M}_a$  est de dimension strictement plus petite que  $\mathcal{M}_a^{\text{reg}}$ . Comme l'espace total de Hitchin  $\mathcal{M}$  est lisse sur  $k$  d'après 4.12.1, les fibres de Hitchin  $\mathcal{M}_a$  sont localement une intersection complète. En particulier, elles ne peuvent pas admettre des composantes irréductibles de dimension strictement plus petite que la sienne. Ceci démontre que  $\mathcal{M}_a^{\text{reg}}$  est dense dans  $\mathcal{M}_a$ .  $\square$

La démonstration ci-dessus est essentiellement la même sur celle de Altman, Iarrobino et Kleiman dans [1] pour la densité de la jacobienne dans la jacobienne compactifiée d'une courbe projective réduite irréductible ayant des singularités planes.

**Corollaire 4.14.2.** — *La partie régulière  $\mathcal{M}_v^{\text{reg}}(a)$  de la fibre de Springer  $\mathcal{M}_v(a)$  est dense.*

On commence par construire une situation globale à partir de la situation locale donnée en procédant comme dans cf. 8.6. L'assertion locale se déduit alors de l'assertion globale à l'aide de la formule de produit cf. 4.13.1. Nous laissons au lecteur les détails de la démonstration de ce corollaire qui ne sera pas utilisé dans la suite de l'article.

**Corollaire 4.14.3.** — *Pour tout  $a \in \mathcal{A}^\vee(\bar{k})$ ,  $\mathcal{M}_a$  est équidimensionnelle de dimension égale à*

$$\sharp \Phi \deg(D)/2 + r(g-1).$$

*De plus, l'ensemble des composantes irréductibles de  $\mathcal{M}_a$  s'identifie au groupe  $\pi_0(P_a)$ .*

*Démonstration.* — La formule de dimension résulte de 4.4.4. L'identification de l'ensemble des composantes irréductibles de  $\mathcal{M}_a$  avec le groupe  $\pi_0(P_a)$  est rendue possible par la section de Kostant.  $\square$

**Corollaire 4.14.4.** — *Si  $\deg(D) > 2g - 2$ , le morphisme  $f^\vee : \mathcal{M}^\vee \rightarrow \mathcal{A}^\vee$  est un morphisme plat de dimension relative  $d$ . Ses fibres sont géométriquement réduites.*



*Démonstration.* — D'après 4.12.1,  $\mathcal{M}^\heartsuit$  et  $\mathcal{A}^\heartsuit$  sont lisses sur  $k$ . Pour démontrer que  $f$  est plat, il suffit alors de démontrer que la dimension des fibres vérifient l'égalité

$$\dim(\mathcal{M}_a) = \dim(\mathcal{M}) - \dim(\mathcal{A}).$$

Ceci découle des égalités  $\dim(\mathcal{M}_a) = \dim(P_a)$ ,  $\dim(\mathcal{M}) = \dim(P)$  et pour  $P$  lisse sur  $\mathcal{A}$  cf. 4.4.2, on a l'égalité

$$\dim(\mathcal{P}^\heartsuit) = \dim(\mathcal{A}^\heartsuit) + \dim(\mathcal{P}_a).$$

Comme dans la démonstration de 4.14.1, on sait que la fibre  $\mathcal{M}_a$  est localement une intersection complète. Puisque qu'elle admet un ouvert dense lisse  $\mathcal{M}_a^{\text{reg}}$ , elle est nécessairement réduite.  $\square$

**4.15. Le cas des groupes endoscopiques.** — Soit  $(\kappa, \rho_\kappa)$  une donnée endoscopique de  $G$  au-dessus de  $X$  cf. 1.8.1. Soit  $H$  le groupe endoscopique associé. Comme dans 1.9, on a un morphisme  $\nu : \mathfrak{c}_H \rightarrow \mathfrak{c}$ . En tordant par  $D$ , on obtient un morphisme  $\nu : \mathfrak{c}_{H,D} \rightarrow \mathfrak{c}_D$ . En prenant les points à valeurs dans  $X$ , on obtient un morphisme qu'on note encore

$$\nu : \mathcal{A}_H \rightarrow \mathcal{A}.$$

On sait d'après [55, 7.2] que la restriction de ce morphisme à l'ouvert  $\mathcal{A}^\heartsuit$  ce morphisme est fini et non ramifié.

**4.15.1.** — Notons

$$r_H^G(D) = (|\Phi| - |\Phi_H|) \deg(D)/2.$$

D'après 4.4.1, on sait

$$\dim(\mathcal{A}) - \dim(\mathcal{A}_H) = r_H^G(D)$$

de sorte que l'image de  $\mathcal{A}_H^{G-\heartsuit} = \nu^{-1}(\mathcal{A}^\heartsuit)$  dans  $\mathcal{A}^\heartsuit$  est un sous-schéma fermé de codimension  $r_H^G(D)$ .

**4.15.2.** — Au-dessus de  $\mathcal{A}_H$ , on dispose de la fibration de Hitchin du groupe  $H$

$$f_H : \mathcal{M}_H \rightarrow \mathcal{A}_H.$$

On a également le champ de Picard  $\mathcal{P}_H \rightarrow \mathcal{A}_H$  agissant sur  $\mathcal{M}_H$ . Il n'y a pas de relation directe entre  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{M}_H$  mais  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{P}_H$  sont reliés de façon simple. Soit  $a_H \in \mathcal{A}_H(\bar{k})$  d'image  $a \in \mathcal{A}^\heartsuit(\bar{k})$ . L'homomorphisme  $\mu : \nu^* J \rightarrow J_H$  de 2.5.1 induit un homomorphisme  $J_a \rightarrow J_{H,a_H}$  qui est

génériquement un isomorphisme. On obtient donc un homomorphisme surjectif

$$\mathcal{P}_a \rightarrow \mathcal{P}_{H,a_H}$$

de noyau

$$\mathcal{R}_{H,a_H}^G = H^0(\overline{X}, J_{H,a_H}/J_a)$$

qui est un groupe affine de dimension

$$\dim(\mathcal{R}_{H,a_H}^G) = \dim(\mathcal{P}_a) - \dim(\mathcal{P}_{H,a_H}).$$

D'après la formule 4.4.4, on également

$$\dim(\mathcal{R}_{H,a_H}^G) = (|\Phi| - |\Phi_H|) \deg(D)/2 = r_H^G(D).$$

**4.15.3.** — Soit  $J_{H,a_H}^\flat$  le modèle de Néron de  $J_{H,a_H}$ . On a des homomorphismes

$$J_a \rightarrow J_{H,a_H} \rightarrow J_{H,a_H}^\flat$$

qui sont des isomorphismes sur un ouvert non-vide de  $\overline{X}$ . Il s'ensuit que  $J_{H,a_H}^\flat$  est aussi le modèle de Néron de  $J_a$ . En combinant avec 4.9.1, on a la suite exacte

$$1 \rightarrow \mathcal{R}_{H,a_H}^G \rightarrow \mathcal{R}_a \rightarrow \mathcal{R}_{H,a_H} \rightarrow 1.$$

On en déduit la formule de dimension

$$\delta_a - \delta_{H,a_H} = r_H^G(D)$$

où  $\delta_a = \dim(\mathcal{R}_a)$  et  $\delta_{H,a_H} = \dim(\mathcal{R}_{H,a_H})$  sont les invariants  $\delta$  de  $a$  et de  $a_H$  par rapport aux groupes  $G$  et  $H$  respectivement.

**4.16. Le cas des groupes appariés.** — Soient  $G_1$  et  $G_2$  deux  $X$ -schémas en groupes appariés au sens de 1.12.5. On a alors un isomorphisme  $\mathfrak{c}_{G_1} = \mathfrak{c}_{G_2}$  cf. 1.12.6. On en déduit un isomorphisme  $\mathfrak{c}_{G_1,D} = \mathfrak{c}_{G_2,D}$  puis un isomorphisme entre les bases des fibrations de Hitchin

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2.$$

Il n'y a pas de relation directe entre les fibrations  $f_1 : \mathcal{M}_1 \rightarrow \mathcal{A}_1$  et  $f_2 : \mathcal{M}_2 \rightarrow \mathcal{A}_2$  de  $G_1$  et  $G_2$  mais une relation entre les champs de Picard associés  $\mathcal{P}_1$  et  $\mathcal{P}_2$ .

**Proposition 4.16.1.** — *Il existe un homomorphisme entre  $\mathcal{A}$ -champs de Picard*

$$\mathcal{P}_1 \rightarrow \mathcal{P}_2$$

*qui induit une isogénie entre leurs composantes neutres.*

*Démonstration.* — Comme dans la démonstration de 1.12.6, on a un isomorphisme  $\mathfrak{t}_1 \xrightarrow{\sim} \mathfrak{t}_2$  au-dessus de l'isomorphisme  $\mathfrak{c}_{G_1} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{c}_{G_2}$ . En vertu de 2.4.7, on en déduit un isomorphisme entre les composantes neutres  $J_{G_1}^0 \xrightarrow{\sim} J_{G_2}^0$  des centralisateurs réguliers de  $G_1$  et  $G_2$ . Puisque  $J_{G_1}$  et  $J_{G_2}$  sont des schémas en groupes de type fini, en composant l'isomorphisme  $J_{G_1}^0 \xrightarrow{\sim} J_{G_2}^0$  avec la multiplication par un entier  $N$  assez divisible, on obtient un homomorphisme  $J_{G_1}^0 \rightarrow J_{G_2}^0$  qui s'étend en un homomorphisme  $J_{G_1} \rightarrow J_{G_2}$  de noyau et de conoyau finis. On en déduit un homomorphisme entre  $\mathcal{P}_1 \rightarrow \mathcal{P}_2$  qui induit une isogénie entre les composantes neutres.  $\square$

## 5. Stratification par normalisation en famille

Dans la suite de l'article, nous aurons besoin de deux stratifications de la base de Hitchin  $\mathcal{A}$  dont l'une est relative au groupe des composantes connexes de la fibre  $\mathcal{P}_a$  et l'autre est relative à l'invariant  $\delta_a$  qui est en quelques sortes la dimension de la partie affine de  $\mathcal{P}_a$ . Ces stratifications existent par des arguments généraux de semi-continuité. Le but de ce chapitre est de comprendre comment ces deux invariants sont reliés à la courbe camérale et de rendre la construction de ces stratifications plus explicites.

L'observation de base est la suivante : comme ces deux invariants sont complètement déterminés par le revêtement caméral  $\tilde{X}_a \rightarrow \bar{X}$ , dans le cas où les normalisations de la courbe camérale vivent en famille, les invariants  $\delta_a$  et  $\pi_0(\mathcal{P}_a)$  sont localement constants. On va donc définir la stratification par normalisation en famille ayant au-dessus de chaque strate une courbe camérale qui se normalise en famille après le changement de base à un revêtement radiciel de la strate. Cette stratification est alors plus fine que les stratifications relatives à  $\delta_a$  et à  $\pi_0(\mathcal{P}_a)$ . On commencera par discuter le cas  $\mathrm{GL}(r)$  où on se ramène à au problème bien connu de normalisation en famille des courbes sur une surface.

Un résultat clé de ce chapitre est la proposition 5.4.2 qui donne une borne inférieure de la codimension de la strate  $\mathcal{A}_\delta$  sous une hypothèse sur  $\deg(D)$ . En caractéristique 0, on dispose d'une démonstration de cette inégalité fondée sur le caractère symplectique de la fibration de Hitchin sans le recours à l'hypothèse sur  $\deg(D)$ . On présentera cet argument dans un autre article où l'accent sera mis plus sur la caractéristique 0. En caractéristique positive, cet argument ne marche pas. Voici comment

on va contourner l'obstacle. Goresky, Kottwitz et MacPherson ont fait des calculs de codimension similaires dans le cadre local *cf.* [26]. Le calcul global se ramène au calcul local pourvu que  $\deg(D)$  soit grand.

On introduira un ouvert étale  $\tilde{\mathcal{A}}$  de  $\mathcal{A}$  au-dessus duquel  $\pi_0(\mathcal{P})$  devient un quotient d'un faisceau constant. Avec cette rigidité supplémentaire, la décomposition endoscopique qu'on étudiera dans le chapitre suivant, aura une forme agréable sur  $\tilde{\mathcal{A}}$ .

**5.1. Normalisations en famille des courbes spectrales.** — Nous allons introduire dans ce chapitre une stratification de la base de Hitchin  $\mathcal{A}$  adaptée au champ de Picard  $\mathcal{P}$ . Le cas général va être modelé sur le cas du groupe linéaire dont on va discuter maintenant.

Dans le cas  $G = \mathrm{GL}(r)$ , on peut associer à tout point  $a \in \mathcal{A}^\vee(\bar{k})$  une courbe réduite  $Y_a$  tracée sur l'espace total du fibré en droites  $D$  *cf.* 4.7. Le groupe de symétries  $\mathcal{P}_a$  est alors le champ de Picard  $\mathrm{Pic}(Y_a)$  des  $\mathcal{O}_{Y_a}$ -modules inversibles. La structure de  $\mathrm{Pic}(Y_a)$  peut être analysée à l'aide de la normalisation de  $Y_a$ . Soit  $\xi : Y_a^b \rightarrow Y_a$  la normalisation de  $Y_a$ . Le foncteur  $\mathcal{L} \mapsto \xi^* \mathcal{L}$  qui associe à tout  $\mathcal{O}_{Y_a}$ -module inversible son image inverse par  $\xi$  définit un homomorphisme  $\mathrm{Pic}(Y_a) \rightarrow \mathrm{Pic}(Y_a^b)$ . La suite exacte longue de cohomologie associée à la suite exacte courte de faisceaux sur  $Y_a$

$$1 \rightarrow \mathcal{O}_{Y_a}^\times \rightarrow \xi_* \mathcal{O}_{Y_a^b}^\times \rightarrow \xi_* \mathcal{O}_{Y_a^b}^\times / \mathcal{O}_{Y_a}^\times \rightarrow 1$$

nous fournit des renseignements suivants. Le noyau de  $\xi^*$  qui consiste en la catégorie des  $\mathcal{O}_{Y_a}$ -modules inversibles  $\mathcal{L}$  munis d'une trivialisation de  $\xi^* \mathcal{L}$ , est un groupe algébrique dont l'ensemble des points est  $H^0(Y_a, \xi_* \mathcal{O}_{Y_a^b}^\times / \mathcal{O}_{Y_a}^\times)$ . De plus, le foncteur  $\xi^*$  est essentiellement surjectif.

On peut attacher à cette situation deux invariants :

- l'ensemble  $\pi_0(Y_a^b)$  des composantes connexes de  $Y_a^b$  ;
- l'entier  $\delta_a = \dim H^0(Y_a, \xi_* \mathcal{O}_{Y_a^b}^\times / \mathcal{O}_{Y_a}^\times)$  appelé l'invariant  $\delta$  de Serre.

En prenant le degré sur les composantes de  $Y_a^b$ , on obtient un homomorphisme

$$\pi_0(\mathrm{Pic}(Y_a)) \rightarrow \mathbb{Z}^{\pi_0(Y_a^b)}$$

qui est un isomorphisme. Quant à l'invariant  $\delta$ , il mesure la dimension du groupe affine  $\ker(\xi^*)$ .

Teissier a introduit dans [74] l'espace de module des normalisations en famille d'une famille de courbes planes. Rappelons d'abord la définition d'une normalisation en famille.

**Définition 5.1.1.** — Soit  $y : Y \rightarrow S$  un morphisme propre, plat et de fibres réduites de dimension un. Une normalisation en famille de  $Y$  est un morphisme propre birationnel  $\xi : Y^\flat \rightarrow Y$  qui est un isomorphisme au-dessus d'un ouvert  $U$  de  $Y$  dense dans chaque fibre de  $Y$  au-dessus de  $S$  et tel que le composé  $y \circ \xi$  est un morphisme propre et lisse.

Dans une normalisation en famille les invariants  $\delta$  et  $\pi_0(\mathcal{P})$  restent localement constants.

**Proposition 5.1.2.** — (1) L'image directe  $y_*(\xi_*\mathcal{O}_{Y^\flat}/\mathcal{O}_Y)$  est un  $\mathcal{O}_S$ -module localement libre de type fini.

(2) Il existe un faisceau  $\pi_0(Y^\flat)$  localement constant pour la topologie étale de  $S$  dont la fibre en chaque point géométrique  $s \in S$  est l'ensemble des composantes connexes de  $Y_s^\flat$ .

*Démonstration.* — Soit  $s$  un point géométrique de  $S$ . La restriction de  $\xi_*\mathcal{O}_{Y^\flat}/\mathcal{O}_Y$  est supporté par  $Y_s - U_s$  qui est un schéma de dimension zéro. Il s'ensuit que  $H^1(Y_s, \xi_*\mathcal{O}_{Y^\flat}/\mathcal{O}_Y) = 0$  et

$$\dim H^0(Y_s, \xi_*\mathcal{O}_{Y^\flat}/\mathcal{O}_Y)$$

est la différence entre le genre arithmétique de  $Y_s$  et celui de  $Y_s^\flat$ . C'est donc une fonction localement constante en  $s$ . Il reste à appliquer le théorème de changement de base pour les faisceaux cohérents [54, 5, corollaire 2].

La seconde assertion est une conséquence du fait que  $\xi_*\overline{\mathcal{Q}}_\ell$  est un faisceau localement constant.  $\square$

Nous allons nous restreindre aux cas des courbes spectrales. Soit  $\mathcal{B}$  l'espace de module des normalisations en famille des courbes spectrales  $Y_a$ . Il associe à tout  $k$ -schéma  $S$  le groupoïde  $\mathcal{B}(S)$  des triplets  $(a, Y_a^\flat, \xi)$  où  $a \in \mathcal{A}^\heartsuit(S)$  un  $S$ -point de  $\mathcal{A}^\heartsuit$  où  $Y_a^\flat$  est une  $S$ -courbe projective lisse et où  $\xi : Y_a^\flat \rightarrow Y_a$  est une normalisation en famille de la courbe spectrale  $Y_a$  associée à  $a$ . Le foncteur  $\mathcal{B}$  est représentable par un  $k$ -schéma de type fini.

Le morphisme d'oubli  $\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}^\heartsuit$  induit une bijection au niveau des  $\bar{k}$ -points. En effet, pour tout  $a \in \mathbb{A}^\heartsuit(\bar{k})$ , la normalisation  $Y_a^\flat$  de  $Y_a$  est uniquement déterminée. Toutefois,  $\mathcal{B}$  a plus de composantes connexes que  $\mathcal{A}$ . En effet, les deux invariants  $\pi_0(\tilde{Y}_a)$  et  $\delta_a$  sont localement constants d'après la proposition précédente. Soit  $\Psi$  l'ensemble des composantes connexes de  $\mathcal{B} \otimes_k \bar{k}$ . Pour tout  $\psi \in \Psi$ , il existe un entier  $\delta(\psi)$  égal à  $\delta_a$  pour tout  $a \in \mathcal{B}_\psi(\bar{k})$ .

**Proposition 5.1.3.** — *Si  $\deg(D)$  est grand par rapport à  $\delta(\psi)$ , alors  $\mathcal{B}_\psi$  est de dimension inférieure ou égale à  $\dim(\mathcal{A}) - \delta(\psi)$ .*

Teissier *cf.* [74], Diaz, Harris *cf.* [15], Fantechi, Gottsche, Van Straten *cf.* [23] et Laumon *cf.* [50] ont démontré l’analogue local de ce résultat. Le passage du local au global nécessite pour le moment l’hypothèse sur  $\deg(D)$ . Nous n’utiliserons ce résultat que comme un guide. À partir du paragraphe suivant, les lettres  $\mathcal{B}$ ,  $\Psi$  et  $\psi$  prendront des significations un peu différentes.

**5.2. Normalisation en famille des courbes camérales.** — Dans le cas des groupes classiques, on dispose encore des courbes spectrales [32], [57]. Néanmoins, avec ces courbes spectrales on est amené à travailler cas par cas. On va en fait examiner le cas général en étudiant l’espace de module des normalisations des courbes camérales munies de l’action de  $W$ . Ceci conduira même dans le cas  $\mathrm{GL}(r)$  à construire une stratification différente, plus fine que celle définie l’espace de module des normalisations des courbes spectrales.

Soit  $S$  un  $k$ -schéma. Un  $S$ -point  $a$  de  $\mathcal{A}^\vee$  définit un morphisme  $a : X \times S \rightarrow \mathfrak{c}_D$ . En prenant l’image réciproque du revêtement  $\pi : \mathfrak{t}_D \rightarrow \mathfrak{c}_D$ , on obtient un revêtement fini plat  $\tilde{X}_a$  de  $X \times S$  qui dans chaque fibre est génériquement un torseur sous  $W$ .

Considérons le foncteur  $\mathcal{B}$  qui associe à tout  $k$ -schéma  $S$  le groupoïde des triplets  $(a, \tilde{X}_a^b, \xi)$  où :

- $a \in \mathcal{A}^\vee(S)$  est un  $S$ -point de  $\mathcal{A}^\vee$ .
- $\tilde{X}_a^b$  est une  $S$ -courbe propre et lisse munie d’une action de  $W$  et d’un morphisme  $\pi_a^b : \tilde{X}_a^b \rightarrow X \times S$  qui est fini, plat et fibre par fibre génériquement un torseur sous  $W$ .
- $\xi : \tilde{X}_a^b \rightarrow \tilde{X}_a$  est morphisme birationnel  $W$ -équivariant qui est une normalisation en famille *cf.* 5.1.1.

Soit  $b = (a, \tilde{X}_a^b, \xi) \in \mathcal{B}(S)$  un point de  $\mathcal{B}$  à valeur dans un schéma connexe  $S$ . Soit  $\mathrm{pr}_S : X \times S \rightarrow S$  la projection sur  $S$ . D’après 5.1.1, l’image directe  $(\mathrm{pr}_S)_*(\xi_* \mathcal{O}_{\tilde{X}_a^b} / \mathcal{O}_{X_a^b})$  est un  $\mathcal{O}_S$ -module localement libre. Il en est de même de

$$((\mathrm{pr}_S)_*(\xi_* \mathcal{O}_{\tilde{X}_a^b} / \mathcal{O}_{X_a^b}) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathfrak{t})^W$$

sous l’hypothèse que l’ordre de  $W$  est premier à la caractéristique de  $k$ . Puisque  $S$  est connexe, ce  $\mathcal{O}_S$ -module localement libre a un rang qu’on notera  $\delta(b)$ .

Pour tout  $a \in \mathcal{A}^\vee(\bar{k})$ , la courbe camérale  $\tilde{X}_a$  admet une unique normalisation  $\tilde{X}_a^b$  qui est alors une courbe lisse sur  $\bar{k}$ . Il en résulte que le morphisme d'oubli  $\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}^\vee$  induit une bijection sur les  $\bar{k}$ -points. Elle induit par ailleurs une injection sur les points à valeurs dans n'importe quel corps par l'unicité de la normalisation. En caractéristique  $p$  et sur un corps non parfait, la normalisation peut ne pas être lisse de sorte que l'application ci-dessus peut ne pas être surjective quand elle est évaluée sur un corps non parfait.

**Théorème 5.2.1.** — *Le foncteur  $\mathcal{B}$  défini ci-dessus est représentable par un  $k$ -schéma de type fini.*

*Démonstration.* — Considérons le foncteur  $\mathcal{B}'$  qui associe à tout schéma  $S$  l'ensemble des couples  $(\tilde{X}_a^b, \gamma)$  où :

- $\tilde{X}_a^b$  est une courbe propre et lisse au-dessus de  $S$  muni d'une action de  $W$  munie d'un morphisme  $\pi_a^b : \tilde{X}_a^b \rightarrow X \times S$  qui est fini, plat et dans chaque fibre est génériquement un toreur  $W$ .

- $\gamma : \tilde{X}_a^b \rightarrow \mathfrak{t}_D \times S$  est un morphisme  $W$ -équivariant tel que l'image inverse de l'ouvert régulier semi-simple de  $\mathfrak{t}_D$  est dense dans chaque fibre.

Soit  $\mathcal{H}$  le foncteur qui associe à tout schéma  $S$  l'ensemble des classes d'isomorphisme de courbes projectives lisses  $\tilde{X}_a^b$  sur  $S$  muni d'une action de  $W$  et d'un morphisme  $\pi_a^b : \tilde{X}_a^b \rightarrow X \times S$  comme ci-dessus. Ce foncteur est représentable par un  $k$ -schéma quasi-projectif. Le morphisme  $h : \mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{H}$  est également représentable de sorte que  $\mathcal{B}'$  est représentable par un  $k$ -schéma quasi-projectif.

Par ailleurs, on a un morphisme  $\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'$ . Il associe au point  $b = (a, \tilde{X}_a^b, \xi) \in \mathcal{B}(S)$  le point  $b' = (\tilde{X}_a^b, \gamma)$  où  $\gamma$  est le composé de  $\xi : \tilde{X}_a^b \rightarrow \tilde{X}_a$  avec l'immersion fermée  $\tilde{X}_a \rightarrow \mathfrak{t}_D \times S$ . Pour démontrer la représentabilité de  $\mathcal{B}$ , il suffit de vérifier l'assertion suivante.  $\square$

**Lemme 5.2.2.** — *Le morphisme  $\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'$  est un isomorphisme.*

*Démonstration.* — Pour démontrer que le morphisme  $\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'$  est un isomorphisme, on va en construire un inverse. Soit  $b' = (\tilde{X}_a^b, \gamma) \in \mathcal{B}'(S)$ . Considérons la partie  $W$ -invariante dans l'image directe  $(\pi_a^b)_* \mathcal{O}_{\tilde{X}_a^b}$ . C'est un faisceau en  $\mathcal{O}_{X \times S}$ -algèbres finies qui fibre par fibre au-dessus de  $S$  est isomorphe génériquement à  $\mathcal{O}_X$ . Puisque  $X$  est normal, ceci implique que

$$((\pi_a^b)_* \mathcal{O}_{\tilde{X}_a^b})^W = \mathcal{O}_{X \times S}.$$

En utilisant l'égalité  $k[\mathfrak{t}]^W = \mathbb{C}$  cf. 1.1.1, le morphisme  $W$ -équivariant  $\gamma : \tilde{X}_a^b \rightarrow \mathfrak{t}_D$  induit un morphisme  $a : X \times S \rightarrow \mathfrak{c}_D$ . Soit  $\tilde{X}_a$  la courbe camérale associée à  $a$ . Le morphisme  $\gamma$  se factorise alors par un morphisme

$$\xi : \tilde{X}_a^b \rightarrow \tilde{X}_a$$

qui est fibre par fibre au-dessus de  $S$  une normalisation de  $X_a$ . On a donc construit un point  $b = (a, \tilde{X}_a^b, \xi) \in \mathcal{B}(S)$ . Le morphisme  $\mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{B}$  ainsi construit est l'inverse du morphisme  $\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'$  dans l'énoncé du lemme.  $\square$

Soit  $\Psi$  l'ensemble de ses composantes connexes de  $\mathcal{B} \otimes_k \bar{k}$ . Pour tout  $\psi \in \Psi$ , soit  $\mathcal{B}_\psi$  le réduit de la composante connexe de  $\mathcal{B} \otimes_k \bar{k}$  indexée par  $\psi$ . Le groupe de Galois  $\text{Gal}(\bar{k}/k)$  agit sur l'ensemble  $\Psi$ . Pour tout  $\psi \in \Psi$ , soit  $\mathcal{A}_\psi$  l'image de  $\mathcal{B}_\psi$  dans  $\mathcal{A}^\heartsuit \otimes_k \bar{k}$ . A priori,  $\mathcal{A}_\psi$  est un sous-ensemble constructible d'après un théorème de Chevalley. On sait que c'est un sous-ensemble localement fermé.

**Lemme 5.2.3.** — *Pour tout  $\psi \in \Psi$ ,  $\mathcal{A}_\psi$  est un sous-schéma localement fermé de  $\mathcal{A} \otimes_k \bar{k}$  et  $\mathcal{B}_\psi \rightarrow \mathcal{A}_\psi$  est un morphisme fini radiciel.*

*Démonstration.* — Le morphisme  $\mathcal{B}_\psi \rightarrow \mathcal{A} \otimes_k \bar{k}$  est un morphisme quasi-fini car il induit une injection sur les points géométriques. D'après le théorème principal de Zariski, il peut se factoriser en une immersion ouverte d'image dense  $\mathcal{B}_\psi \rightarrow \bar{\mathcal{B}}_\psi$  suivie d'un morphisme fini  $\nu : \bar{\mathcal{B}}_\psi \rightarrow \mathcal{A} \otimes_k \bar{k}$ . Notons  $\bar{\mathcal{A}}_\psi$  le sous-schéma fermé de  $\mathcal{A}^\heartsuit \otimes_k \bar{k}$  image de  $\nu$ . Il suffit de démontrer que  $\bar{\mathcal{B}}_\psi \rightarrow \bar{\mathcal{A}}_\psi$  induit une bijection sur les points géométriques. En effet, si c'est le cas  $\mathcal{A}_\psi$  sera le complémentaire de l'image de  $\bar{\mathcal{B}}_\psi - \mathcal{B}_\psi$  et par conséquent est un ouvert de  $\bar{\mathcal{A}}_\psi$ . De plus,  $\mathcal{B}_\psi = \nu^{-1}(\mathcal{A}_\psi)$  si bien que le morphisme  $\mathcal{B}_\psi \rightarrow \mathcal{A}_\psi$  est un morphisme fini radiciel.

Soit  $a \in \bar{\mathcal{A}}_\psi(\bar{k})$  tel qu'il existe deux points différents  $b, b' \in \bar{\mathcal{B}}_\psi(\bar{k})$  d'image  $a$ . Soit  $\tilde{a}$  le point générique de  $\bar{\mathcal{A}}_\psi$ . L'image inverse  $\nu^{-1}(\tilde{a})$  est un épaississement du point générique de  $\mathcal{B}_\psi$ . Faisons passer un trait formel  $S$  avec le point générique en  $\tilde{a}$  et le point fermé en  $a$ . L'image inverse  $\nu^{-1}(S)$  est un schéma fini au-dessus de  $S$  avec dans sa fibre spéciale deux points distincts  $b$  et  $b'$ . Elle a donc au moins deux composantes connexes contenant respectivement  $b$  et  $b'$  par le lemme de relèvement d'idempotents. Comme le morphisme  $\mathcal{B}_\psi \rightarrow \mathcal{A}_\psi$  induit une bijection sur les points à valeur dans un corps algébriquement clos, l'une de ses deux composantes connexes a une fibre générique vide. Ceci contredit l'hypothèse que  $b$  et  $b'$  sont dans l'adhérence de  $\mathcal{B}_\psi$ .  $\square$



**Proposition 5.2.4.** — *Il existe une unique stratification*

$$\mathcal{A}^\heartsuit \otimes_k \bar{k} = \bigsqcup_{\psi \in \Psi} \mathcal{A}_\psi$$

par des sous-schémas localement fermés réduits connexes  $\mathcal{A}_\psi$  telle que

(1) *au-dessus de chaque strate  $\mathcal{A}_\psi$ , la courbe camérale  $\tilde{X}_\psi$  admet une normalisation en famille après un changement de base fini radiciel.*

(2) *pour tout  $\bar{k}$ -schéma  $S$  connexe réduit qui est muni d'un morphisme  $s : S \rightarrow \mathcal{A}^\heartsuit \otimes_k \bar{k}$  tel que la restriction de la courbe camérale à  $S$  admet une normalisation famille, alors le morphisme  $s$  se factorise par l'un des  $\mathcal{A}_\psi$ .*

*Démonstration.* — Les  $\mathcal{A}_\psi$  construits dans le lemme précédent forment une stratification qui vérifie la première condition. Si  $s : S \rightarrow \mathcal{A}^\heartsuit \otimes_k \bar{k}$  est un morphisme comme dans la seconde condition, il doit nécessairement se factoriser par  $\mathcal{B}$ . Comme  $S$  est connexe, et il se factorise par l'un des  $\mathcal{B}_\psi$ . Il s'ensuit qu'il se factorise par  $\mathcal{A}_\psi$  de sorte que la seconde condition est également satisfaite. Il est clair que les deux conditions caractérisent complètement la stratification.  $\square$

Considérons l'ordre partiel dans  $\Psi$  dans lequel  $\psi' \leq \psi$  si et seulement si la strate  $\mathcal{A}_{\psi'}$  est contenue dans l'adhérence de  $\mathcal{A}_\psi$ . Puisque  $\mathcal{A}^\heartsuit \otimes_k \bar{k}$  est irréductible,  $\Psi$  a un élément maximal qu'on notera  $\psi_G$ .

**Lemme 5.2.5.** — *Supposons que  $\deg(D) > 2g$ . Alors la grosse strate  $\mathcal{A}_{\psi_G}$  est égale à l'ouvert  $\mathcal{A}^\diamond$  de 4.6. En particulier,  $a \in \mathcal{A}_{\psi_G}$  si et seulement si la courbe camérale  $\psi_G$  est lisse.*

*Démonstration.* — On sait par 4.6.1 que  $\mathcal{A}^\diamond$  est un ouvert non vide de  $\mathcal{A}^\heartsuit$ . Il s'ensuit que  $\mathcal{A}^\diamond \cap \mathcal{A}_{\psi_G} \neq \emptyset$ . D'après 4.6.3,  $a \in \mathcal{A}^\diamond(\bar{k})$  si et seulement si la courbe camérale est lisse. Cette propriété étant préservée dans une normalisation en famille de courbe camérale, on en déduit que  $\tilde{X}_a$  est lisse pour tout  $a \in \mathcal{A}_{\psi_G}(\bar{k})$  d'où  $\mathcal{A}_{\psi_G} \subset \mathcal{A}^\diamond(\bar{k})$ . Par ailleurs, au-dessus de  $\mathcal{A}^\diamond$ , on a une normalisation en famille triviale des courbes camérales de sorte que  $\mathcal{A}_{\psi_G} = \mathcal{A}^\diamond$ .  $\square$

Le groupe  $\text{Gal}(\bar{k}/k)$  agit sur l'ensemble fini  $\Psi$ . La réunion des strates  $\mathcal{A}_\psi$  pour les indices  $\psi$  dans une orbite sous  $\text{Gal}(\bar{k}/k)$  descend en un sous-schéma localement fermé de  $\mathcal{A}^\heartsuit$ .

**5.3. Stratification à  $\delta$  constant.** — D'après la formule 4.9.2, l'invariant  $\delta_a$  est constant dans une normalisation en famille de base connexe. On en déduit une application

$$\delta : \Psi \rightarrow \mathbb{N}$$

de l'ensemble  $\Psi$  des composantes connexes de  $\mathcal{B}$  dans  $\mathbb{N}$  tel que pour tout  $a \in \mathcal{A}_\psi(\bar{k})$ , on a  $\delta_a = \delta(\psi)$ . Notons que la fonction  $\delta : \Psi \rightarrow \mathbb{N}$  est une fonction décroissante.

**Lemme 5.3.1.** — *Soient  $\psi, \psi' \in \Psi$  avec  $\psi \geq \psi'$ . Alors on a  $\delta(\psi) \leq \delta(\psi')$ .*

*Démonstration.* — Soit  $S = \text{Spec}(R)$  un trait formel de point générique  $\eta = \text{Spec}(k(\eta))$  et de point spécial  $s = \text{Spec}(k(s))$  algébriquement clos. Soit  $a : S \rightarrow \mathcal{A}^\heartsuit$  un  $S$ -point de  $\mathcal{A}^\heartsuit$  dont le point générique est dans  $\mathcal{A}_\psi$  et dont le point spécial est dans  $\mathcal{A}_{\psi'}$ . Soit

$$\tilde{X}_a \rightarrow S \times X$$

le revêtement caméral associé.

Quitte à remplacer  $\eta$  par une extension inséparable et  $S$  par son normalisé dans cette extension, on peut supposer que le morphisme  $a : \eta \rightarrow \mathcal{A}_\psi$  se factorise par  $\mathcal{B}_\psi$ . Alors la normalisation  $\tilde{X}_{a,\eta}^b$  de la fibre générique  $\tilde{X}_{a,\eta}$  est une courbe lisse.

Considérons la normalisation  $\tilde{X}_a^b$  de  $\tilde{X}_a$  dans  $\tilde{X}_{a,\eta}^b$  et notons  $\xi$  le morphisme

$$\xi : \tilde{X}_a^b \rightarrow \tilde{X}_a.$$

Le  $R$ -schéma  $\tilde{X}_{a,\eta}^b$  est plat. En effet, comme  $R$  est un anneau de valuation discrète, pour qu'un  $R$ -module  $M$  soit plat, il suffit qu'il soit sans torsion. Par ailleurs, l'opération de normalisation n'introduit pas de torsion. Le  $R$ -module

$$H^0(\tilde{X}_a, \xi_* \mathcal{O}_{\tilde{X}_a^b} / \mathcal{O}_{\tilde{X}_a})$$

est alors un  $R$ -module plat  $M$  fini et plat muni d'une action de  $W$ . En effet, en tordant par un fibré inversible sur  $\tilde{X}_a$  de degré très négatif puis en prenant la suite exacte longue de cohomologie on peut réaliser  $H^0(\tilde{X}_a, \xi_* \mathcal{O}_{\tilde{X}_a^b} / \mathcal{O}_{\tilde{X}_a})$  comme le noyau d'un morphisme surjectif entre deux  $R$ -modules plats.

D'après la formule 4.9.2, la fibre générique de ce module calcule l'invariant  $\delta(\psi)$

$$\delta(\psi) = \dim_{k(\eta)}(\mathfrak{t} \otimes_{\mathcal{O}_X} M_\eta)^W.$$

En déployant de  $G$  dans un voisinage du lieu de ramification de  $\tilde{X}_{a,k(s)} \rightarrow X \times S$ , la formule ci-dessus se récrit

$$\delta(\psi) = \dim_{k(\eta)}(\mathfrak{t} \otimes_k M_\eta)^{\mathbb{W}}.$$

Puisque  $M$  est  $R$ -plat et l'ordre de  $\mathbb{W}$  est premier à la caractéristique, on peut décomposer le  $R[\mathbb{W}]$ -module  $M$  en somme directe de représentations irréductibles de  $\mathbb{W}$  de sorte que

$$\dim_{k(\eta)}(\mathfrak{t} \otimes_k M_\eta)^{\mathbb{W}} = \dim_{k(s)}(\mathfrak{t} \otimes_k M_s)^{\mathbb{W}}.$$

La fibre spéciale de  $\tilde{X}_{a,s}^b$  de  $\tilde{X}_a^b$  n'est a priori qu'une normalisation partielle de  $\tilde{X}_a$ . Pour calculer l'invariant  $\delta(\psi')$ , on est amené à prendre la normalisation complète  $(\tilde{X}_{a,s}^b)^b$  de  $\tilde{X}_{a,s}^b$ . Le  $k(s)[\mathbb{W}]$ -module  $M_s$  est alors un facteur direct de  $H^0(\mathcal{O}_{(\tilde{X}_{a,s}^b)^b}/\mathcal{O}_{\tilde{X}_{a,s}})$ . On en déduit la formule

$$\delta(\psi') \geq \dim_l(\mathfrak{t} \otimes_k M_l)^{\mathbb{W}}$$

d'où le lemme.  $\square$

Pour tout entier  $\delta \in \mathbb{N}$ , la réunion

$$\overline{\mathcal{A}}_\delta \otimes_k \bar{k} := \bigsqcup_{\delta(\psi) \geq \delta} \mathcal{A}_\psi$$

est un fermé de  $\mathcal{A} \otimes_k \bar{k}$ . On va poser  $\mathcal{A}_\delta := \overline{\mathcal{A}}_\delta - \overline{\mathcal{A}}_{\delta+1}$  qui est alors un sous-schéma localement fermé de  $\mathcal{A}$ . On obtient ainsi une stratification

$$(5.3.2) \quad \mathcal{A}^\heartsuit \otimes_k \bar{k} = \bigsqcup_{\delta \in \mathbb{N}} \mathcal{A}_\delta$$

appelée *la stratification à  $\delta$  constant*.

Considérons la grosse strate  $\mathcal{A}_{\psi_G}$  pour l'élément maximal  $\psi_G$  de  $\Psi$ . Cette strate consiste en les points  $a \in \mathcal{A}(\bar{k})$  telle que la courbe camérale  $\tilde{X}_a$  est lisse. L'invariant  $\delta$  vaut alors 0. En particulier, la strate  $\mathcal{A}_0$  dans la stratification  $\delta$  constant ci-dessus est un ouvert non vide de  $\mathbb{A}$ . En général, il contient strictement l'ouvert  $\mathcal{A}_{\psi_G}$ , comme le montre l'exemple suivant.

Dans le cas  $G = \mathrm{GL}_r$ , la description de  $\mathcal{P}_a$  en termes de la courbe spectrale implique que  $\delta_a = 0$  si et seulement si la courbe spectrale  $Y_a$  est lisse. Il peut arriver que la courbe spectrale est lisse avec un point de branchement  $y \in Y_a$  d'ordre supérieur à 2. Dans ce cas la courbe camérale  $\tilde{X}_a$  n'est pas lisse. On voit ainsi que dans le cas  $\mathrm{GL}_r$  la stratification

par normalisation en famille des courbes camérales raffine strictement la stratification par normalisation en famille des courbes spectrales.

**5.4. Stratification par les valuations radicielles.** — Soit  $\bar{v}$  un point géométrique de  $\bar{X}$  et notons  $\bar{\mathcal{O}}_{\bar{v}}$  la complétion de  $\bar{X}$  en  $\bar{v}$  et  $\bar{F}_{\bar{v}}$  son corps des fractions. En choisissant un uniformisant  $\varepsilon_{\bar{v}}$ , on peut identifier  $\bar{\mathcal{O}}_{\bar{v}}$  avec l'anneau  $\bar{k}[[\varepsilon_{\bar{v}}]]$ . Nous choisissons une trivialisation de la restriction  $\rho_G$  à  $\bar{\mathcal{O}}_{\bar{v}}$  qui déploie  $G$  et qui fournit en particulier un isomorphisme  $W = \mathbb{W}$ .

Nous allons passer brièvement en revue l'analyse [26] de la stratification de  $\mathfrak{c}^\vee(\mathcal{O}_{\bar{v}})$  par les valuations radicielles, due à Goresky, Kottwitz et MacPherson. Leurs strates de valuations radicielles sont plus fines que nos strates définies par les normalisations en familles et a fortiori plus fines que les strates à  $\delta$  constants.

Soient  $a \in \mathfrak{c}^\vee(\bar{\mathcal{O}}_{\bar{v}})$  et  $J_a = a^*J$  le schéma en groupes lisse sur  $\bar{\mathcal{O}}_{\bar{v}}$  qui s'en déduit. La fibre générique de  $J_a$  est un tore dont la monodromie peut être décrite à l'aide du revêtement caméral cf. 2.4.7. Soit  $\bar{F}_{\bar{v}}^{\text{sep}}$  la clôture séparable de  $\bar{F}_{\bar{v}}$ . Soit  $x \in \mathfrak{t}(\bar{F}_{\bar{v}}^{\text{sep}})$  un  $\bar{F}_{\bar{v}}^{\text{sep}}$ -point de  $\mathfrak{t}$  d'image  $a \in \mathfrak{c}(\bar{F}_{\bar{v}})$ . Le choix de ce point définit un homomorphisme

$$\pi_a^\bullet : I_{\bar{v}} \rightarrow \mathbb{W}$$

où  $I_{\bar{v}} = \text{Gal}(\bar{F}_{\bar{v}}^{\text{sep}}/\bar{F}_{\bar{v}})$ . Puisque la caractéristique de  $k$  ne divise par l'ordre de  $\mathbb{W}$ ,  $\pi_a^\bullet$  se factorise par le quotient modéré  $I_{\bar{v}}^{\text{tame}}$  de  $I_{\bar{v}}$ . Pour adhérer aux notations de [26], choisissons un générateur topologique de  $I_{\bar{v}}^{\text{tame}}$  et notons  $w_a$  l'image de ce générateur par  $\pi_a^\bullet$ .

Pour toute racine  $\alpha \in \Phi$ , on a un entier

$$r(\alpha) := \text{val}_{\bar{v}}(\alpha(x))$$

où  $\text{val}_{\bar{v}}$  est l'unique prolongement de la valuation  $\text{val}_{\bar{v}}(\varepsilon_{\bar{v}}) = 1$  sur  $\bar{F}_{\bar{v}}$  à  $\bar{F}_{\bar{v}}^{\text{sep}}$ . On obtient ainsi une fonction  $r : \Phi \rightarrow \mathbb{Q}_+$ .

Le couple  $(w_a, r)$  dépend du choix de  $x$  mais l'orbite sous  $\mathbb{W}$  de ce couple n'en dépend pas. Nous allons noter  $[w_a, r]$  l'orbite sous  $\mathbb{W}$  du couple  $(w_a, r)$ .

On a l'égalité évidente

$$\sum_{\alpha \in \Phi} r(\alpha) = \deg_{\bar{v}}(a^* \mathfrak{D}_G) = d_{\bar{v}}(a).$$

L'invariant

$$c_{\bar{v}}(a) = \dim(\mathfrak{t}) - \dim(\mathfrak{t}^{w_a})$$

est la chute du rang torique du modèle de Néron de  $J_a$ . D'après la formule de Bezrukavnikov, on a

$$\delta_{\bar{v}}(a) = \frac{d_{\bar{v}}(a) - c_{\bar{v}}(a)}{2}.$$

Soit  $\mathfrak{c}^\heartsuit(\mathcal{O}_{\bar{v}})_{[w,r]}$  le sous-ensemble des  $a \in \mathfrak{c}^\heartsuit(\mathcal{O}_{\bar{v}})$  avec l'invariant  $[w, r]$  donné. D'après [26], cet ensemble est admissible c'est-à-dire qu'il existe un entier  $N$  et un sous-schéma localement fermé  $Z$  de  $\mathfrak{c}(\mathcal{O}_{\bar{v}}/\varepsilon_{\bar{v}}^N \mathcal{O}_{\bar{v}})$  vu comme  $\bar{k}$ -schéma tel que  $\mathfrak{c}^\heartsuit(\mathcal{O}_{\bar{v}})_{[w,r]}$  soit l'image réciproque de  $Z(\bar{k})$  par l'application  $\mathfrak{c}(\mathcal{O}_{\bar{v}}) \rightarrow \mathfrak{c}(\mathcal{O}_{\bar{v}}/\varepsilon_{\bar{v}}^N \mathcal{O}_{\bar{v}})$ . On dira que  $\mathfrak{c}^\heartsuit(\mathcal{O}_{\bar{v}})_{[w,r]}$  est admissible d'échelon  $N$ .

Ils définissent alors la *codimension de la strate*  $\mathfrak{c}^\heartsuit(\mathcal{O}_{\bar{v}})_{[w,r]}$  comme la codimension de  $Z$  dans  $\mathfrak{c}(\mathcal{O}_{\bar{v}}/\varepsilon_{\bar{v}}^N \mathcal{O}_{\bar{v}})$  vue comme  $\bar{k}$ -schémas. Cette codimension ne dépend visiblement pas de l'échelon  $N$  choisi pourvu que celui-ci soit assez grand. Notons  $\text{codim}[w, r]$  cette codimension. D'après [26, 8.2.2] on a la formule explicite

$$\text{codim}[w, r] = d(w, r) + \frac{d_{\bar{v}}(a) + c_{\bar{v}}(a)}{2}$$

où l'entier  $d(w, r)$  est la codimension de  $\mathfrak{t}_w(\mathcal{O})_r$  dans  $\mathfrak{t}_w(\mathcal{O})$  dans les notations de *loc. cit.* Nous nous contenterons d'une estimation plus grossière.

**Proposition 5.4.1.** — *Si  $\delta_a > 0$ , on a l'inégalité*

$$\text{codim}[w, r] \geq \delta_a + 1.$$

*Démonstration.* — Il est clair que

$$\text{codim}[w, r] = \delta_{\bar{v}}(a) + c_{\bar{v}}(a) + d(w, r)$$

où  $\delta_{\bar{v}}(a) = (d_{\bar{v}}(a) - c_{\bar{v}}(a))/2$ . Si  $w$  n'est pas l'élément trivial de  $W$ , on a  $c_{\bar{v}}(a) \geq 1$ . Si  $w = 1$ , par définition de [26, 8.2.2],  $d(w, r)$  est la codimension de  $\mathfrak{t}(\bar{\mathcal{O}}_{\bar{v}})_r$  dans  $\mathfrak{t}(\bar{\mathcal{O}}_{\bar{v}})$  où  $\mathfrak{t}(\bar{\mathcal{O}}_{\bar{v}})_r$  est la partie admissible de  $\mathfrak{t}(\bar{\mathcal{O}}_{\bar{v}})$  constituée des éléments ayant la valuation radicielle  $r$ . Si  $\delta_{\bar{v}}(a) > 0$ , alors  $r \neq 0$  de sorte que cette partie est de codimension strictement positive. Donc  $d(w, r) \geq 1$ . Dans les deux cas, on obtient donc l'inégalité qu'on voulait.  $\square$

**Proposition 5.4.2.** — *Si le degré de  $D$  est très grand par rapport à  $\delta$ , la strate à  $\delta$  constant  $\mathcal{A}_\delta$  est de codimension plus grande ou égale à  $\delta$ .*

*Démonstration.* — Pour toute partition  $\delta_\bullet$  de  $\delta$  en une somme d'entiers naturels  $\delta = \delta_1 + \dots + \delta_n$ , considérons le sous-schéma  $Z_{\delta_\bullet}$  de  $\mathcal{A}^\vee \times X^j$  qui consiste en les uplets  $(a; x_1, \dots, x_n)$  avec  $a \in \mathcal{A}^\vee(\bar{k})$  et  $x_1, \dots, x_n \in X(\bar{k})$  tels que l'invariant  $\delta$  local  $\delta_{x_i}(a)$  vaut  $\delta_i$ . On peut stratifier  $Z_{\delta_\bullet}$  en réunion des strates  $Z_{[w_\bullet, r_\bullet]}$  des  $(a; x_1, \dots, x_n)$  tel que l'image dans  $\mathfrak{c}^\heartsuit(\bar{\mathcal{O}}_{x_i})$  soit dans la strate de valuation radicielle  $\mathfrak{c}^\heartsuit(\bar{\mathcal{O}}_{x_i})_{[w_i, r_i]}$ . Supposons que cette strate est admissible d'échelon  $N_i$ . Pour  $\deg(D)$  très grand, l'application linéaire

$$\mathcal{A} \longrightarrow \prod_{i=1}^n \mathfrak{c}(\bar{\mathcal{O}}_{x_i}/\varepsilon^{N_i}\bar{\mathcal{O}}_{x_i})$$

est surjective. Il s'ensuit que  $Z_{[w_\bullet, r_\bullet]}$  est de codimension au moins égale à

$$\sum_{i=1}^n (\delta_i + 1)$$

dans  $\mathcal{A} \times X^n$ . Il s'ensuit que son image dans  $\mathcal{A}$  est de codimension au moins égale à  $\delta = \sum_{i=1}^n \delta_i$ . La proposition s'en déduit.  $\square$

On pense que cette inégalité est valide sans l'hypothèse que  $\deg(D)$  soit très grand par rapport à  $\delta$ . Un calcul de l'action infinitésimale de  $\mathcal{P}_a$  sur  $\mathcal{M}_a$  montre que c'est vrai en caractéristique zéro. Nous présenterons sur ce calcul dans une autre occasion.

**5.5. L'ouvert étale  $\tilde{\mathcal{A}}$  de  $\mathcal{A}$ .** — Dans l'énoncé de la dualité de Tate-Nakayama 1.6.4, il est nécessaire de choisir un certain point base pour définir la  $\kappa$ -intégrale orbitale pour un élément  $\kappa \in \hat{\mathbb{T}}$ . On va de même construire un ouvert étale  $\tilde{\mathcal{A}}$  de  $\mathcal{A}$  qui consiste à faire le choix d'un point base de la courbe camérale dans le lieu où celle-ci est étale au-dessus de  $X$ . On verra dans la suite l'énoncé de stabilisation deviendra beaucoup plus plaisant sur  $\tilde{\mathcal{A}}$ .

Soit  $\infty \in X(\bar{k})$  un point géométrique de  $X$ . Considérons l'ouvert  $\mathcal{A}^\infty$  de  $\mathcal{A}^\vee \otimes_k \bar{k}$  qui consiste en les points  $a \in \mathcal{A}^\vee(\bar{k})$  tel que le revêtement caméral  $\tilde{X}_a \rightarrow \bar{X}$  est étale au-dessus du point  $\infty$ . En variant le point  $\infty$ , on obtient un recouvrement de  $\mathcal{A}^\vee \otimes_k \bar{k}$  par les ouverts de Zariski  $\mathcal{A}^\infty$ . Notons que si le point  $\infty$  est défini sur  $k$ ,  $\mathcal{A}^\infty$  l'est aussi.

Considérons le revêtement  $\tilde{\mathcal{A}}$  dont les  $\bar{k}$ -points sont des couples  $(a, \tilde{\infty})$  où  $a \in \mathcal{A}^\infty(\bar{k})$  et  $\tilde{\infty}$  est un point de  $\tilde{X}_a$  au-dessus de  $\infty$ . Le morphisme d'oubli de  $\tilde{\infty}$

$$(5.5.1) \quad \mathcal{W}_\infty : \tilde{\mathcal{A}} \rightarrow \mathcal{A}^\infty$$

est un torseur sous le groupe  $W_\infty$  qui est la fibre de  $W$  au-dessus de  $\infty$ . Si le point  $\infty$  est défini sur  $k$ ,  $\tilde{\mathcal{A}}$  est aussi défini sur  $k$ .

**Lemme 5.5.2.** — *Supposons que  $\deg(D) > 2g$ . Alors  $\tilde{\mathcal{A}}$  est lisse et irréductible.*

*Démonstration.* — On a un diagramme cartésien

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\mathcal{A}} & \longrightarrow & \mathfrak{t}_{D,\infty} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{A}^\infty & \longrightarrow & \mathfrak{c}_{D,\infty} \end{array}$$

où la flèche de bas est une partie ouverte de l'application linéaire de restriction de  $\mathcal{A} = H^0(X, \mathfrak{c}_D)$  à la fibre de  $\mathfrak{c}_D$  en  $\infty$  et où la flèche de droite se déduit de  $\mathfrak{t} \rightarrow \mathfrak{c}$  par torsion. Sous l'hypothèse  $\deg(D) > 2g$ , cette application linéaire est surjective *cf.* 4.6.2. On en déduit que la flèche du haut du diagramme est un morphisme lisse de fibres connexes. Puisque  $\mathfrak{t}_{D,\infty}$  est un vectoriel,  $\tilde{\mathcal{A}}$  est lisse et irréductible.  $\square$

Considérons l'image réciproque de la stratification

$$(5.5.3) \quad \mathcal{A} \otimes_k \bar{k} = \bigsqcup_{\psi \in \Psi} \mathcal{A}_\psi.$$

par le morphisme  $\mathcal{W}_\infty : \tilde{\mathcal{A}} \rightarrow \mathcal{A}^\infty$ . En décomposant  $\mathcal{W}_\infty^{-1}(\mathcal{A}_\psi)$  pour tout  $\psi \in \Psi$  en composantes connexes, on obtient ainsi une stratification

$$(5.5.4) \quad \tilde{\mathcal{A}} = \bigsqcup_{\tilde{\psi} \in \tilde{\Psi}} \tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{\psi}}.$$

Sur l'ensemble  $\tilde{\Psi}$ , on considère la relation d'ordre définie par  $\tilde{\psi}_1 \leq \tilde{\psi}_2$  si et seulement si  $\tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{\psi}_1}$  est inclus dans l'adhérence de  $\tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{\psi}_2}$ . Le groupe  $W_\infty$  agit sur l'ensemble  $\tilde{\Psi}$  et l'ensemble quotient de  $\tilde{\Psi}$  par l'action de  $W_\infty$  s'identifie au sous-ensemble de  $\Psi$  des strates  $\mathcal{A}_\psi$  ayant une intersection non vide avec  $\mathcal{A}^\infty$ .

Puisque  $\tilde{\mathcal{A}}$  est irréductible, l'ensemble  $\tilde{\Psi}$  admet un élément maximal noté  $\tilde{\psi}$ . Il est stable sous l'action de  $W_\infty$  et son image est l'élément maximal  $\psi_G$  de  $\Psi$ .

**5.6. Stratification par les invariants monodromiques.** — On va maintenant construire une autre stratification de  $\mathcal{A}^\heartsuit \otimes_k \bar{k}$  fondée sur la monodromie de la courbe camérale. Comme la stratification à  $\delta$  constant, la stratification par les invariants monodromiques sera obtenue en regroupant les strates dans la stratification par normalisation en famille des courbes camérales 5.2.4.

Les invariants monodromiques qu'on va définir dépendent d'une réduction du torseur  $\rho_G$  cf. 1.3.6. On se donne donc un torseur  $\rho : X_\rho \rightarrow X$  sous un groupe discret  $\Theta_\rho$  et un homomorphisme  $\Theta_\rho \rightarrow \text{Out}(\mathbb{G})$  tel que  $\rho_G = \rho \wedge^{\Theta_\rho} \text{Out}(\mathbb{G})$ . On se donne aussi un  $\bar{k}$ -point  $\infty_\rho$  de  $X_\rho$  au-dessus de  $\infty$ . Ce point définit un point géométrique  $x_G$  de  $\rho_G$  au-dessus de  $\infty$  et fournit en particulier une identification  $W_\infty = \mathbb{W}$ .

Pour tout  $a \in \mathcal{A}^\infty(\bar{k})$ , on a un revêtement étale

$$\tilde{X}_{\rho,a} = \tilde{X}_a \times_X X_\rho$$

de la courbe camérale  $\tilde{X}_a$ . La courbe  $\tilde{X}_{\rho,a}$  est alors munie d'une action de  $\mathbb{W} \rtimes \Theta_\rho$ . Soit  $\tilde{X}_{\rho,a}^b$  la normalisation de  $\tilde{X}_{\rho,a}$  qui est aussi munie d'une action de  $\mathbb{W} \rtimes \Theta_\rho$ . La donnée d'un point géométrique  $\tilde{\infty}$  de  $\tilde{X}_a$  définit alors un point géométrique

$$\tilde{\infty}_\rho = (\tilde{\infty}, \infty_\rho)$$

dans le lieu lisse de  $\tilde{X}_{\rho,a}$  et donc un point géométrique de  $\tilde{X}_{\rho,a}^b$ .

Soit  $\tilde{a} = (a, \tilde{\infty}) \in \tilde{\mathcal{A}}(\bar{k})$ . Soit  $C_{\tilde{a}}$  la composante connexe de  $\tilde{X}_{\rho,a}^b$  qui contient le point  $\tilde{\infty}$ . Soit  $W_{\tilde{a}}$  le sous-groupe de  $\mathbb{W} \rtimes \Theta_\rho$  constitués des éléments qui laissent stable cette composante. On considère aussi le sous-groupe  $I_{\tilde{a}}$  engendré par les éléments de  $W_{\tilde{a}}$  qui admettent au moins un point fixe dans  $C_{\tilde{a}}$ . C'est un sous-groupe normal de  $W_{\tilde{a}}$ . Il est clair que la  $I_{\tilde{a}}$  est contenu dans le noyau de la projection  $W_{\tilde{a}} \rightarrow \Theta_\rho$  de sorte que  $I_{\tilde{a}} \subset W_{\tilde{a}} \cap \mathbb{W}$ .

**Proposition 5.6.1.** — *Il existe une application  $\tilde{\psi} \mapsto (I_{\tilde{\psi}}, W_{\tilde{\psi}})$  de l'ensemble  $\tilde{\Psi}$  des strates dans l'ensemble des couples  $(I_*, W_*)$  formés d'un sous-groupe  $W_*$  de  $\mathbb{W} \rtimes \Theta$  et d'un sous-groupe normal  $I_*$  de  $W_*$  telle que pour tout  $\tilde{a} = (a, \tilde{\infty}) \in \tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{\psi}}(\bar{k})$  on a*

$$(I_{\tilde{a}}, W_{\tilde{a}}) = (I_{\tilde{\psi}}, W_{\tilde{\psi}}).$$



*Démonstration.* — Considérons l'image inverse de  $\mathcal{B}_\psi \rightarrow \mathcal{A}_\psi$  par le morphisme fini étale  $\mathcal{W}_\infty : \mathcal{W}_\infty^{-1}(\mathcal{A}_\psi) \rightarrow \mathcal{A}_\psi$ . Choisissons une de ses composantes connexes  $\tilde{\mathcal{B}}_{\tilde{\psi}}$ . Par construction, au-dessus de  $\mathcal{B}_\psi$ , on a une courbe propre et lisse  $\tilde{X}_{\tilde{\psi}}^b$  qui normalise fibre par fibre la courbe camérale  $\tilde{X}_\psi$ . Au-dessus de  $\tilde{\mathcal{B}}_{\tilde{\psi}}$ ,  $\tilde{X}_{\tilde{\psi}}^b$  admet une section tautologique. Cette section définit une composante connexe  $C_{\tilde{\psi}}$  qui fibre par fibre est la composante connexe  $C_{\tilde{a}}$ . C'est une courbe projective lisse de fibres connexes au-dessus de  $\mathcal{B}_{\tilde{\psi}}$ . Soit  $W_{\tilde{\psi}}$  le sous-groupe de  $\mathbb{W} \rtimes \Theta_\rho$  qui laisse stable cette composante. Pour tout  $\tilde{a} \in \tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{\psi}}(\bar{k})$ , on a  $W_{\tilde{a}} = W_{\tilde{\psi}}$ .

Soit  $w \in W_{\tilde{\psi}}$  un élément ayant au moins un point fixe dans  $C^{\tilde{a}}$ . On a alors  $w \in \mathbb{W}$ . Puisque le revêtement  $C_{\tilde{a}} \rightarrow \bar{X}$  est génériquement étale galoisien de groupe de Galois  $W_{\tilde{a}}$ , les points fixes de  $w$  dans  $C_{\tilde{a}}$  sont isolés. Puisque l'ordre de  $\mathbb{W}$  est premier à la caractéristique de  $k$ , les points fixes sont de multiplicité un. En appliquant la formule des points fixes de Lefschetz, on a

$$\mathrm{tr}(w, H^*(C_{\tilde{a}}, \overline{\mathbb{Q}_\ell})) \neq 0.$$

Puisque  $C_{\tilde{\psi}} \rightarrow \tilde{\mathcal{B}}_{\tilde{\psi}}$  est un morphisme propre lisse, les groupes de cohomologie  $H^*(C_{\tilde{a}'}, \overline{\mathbb{Q}_\ell})$  s'organisent en un système local quand  $\tilde{a}'$  varie dans  $\mathcal{B}_{\tilde{\psi}}$ . On en déduit que

$$\mathrm{tr}(w, H^*(C_{\tilde{a}'}, \overline{\mathbb{Q}_\ell})) \neq 0$$

pour tout  $\tilde{a}' \in \mathcal{B}_{\tilde{\psi}}(\bar{k})$ . Il en résulte que  $w$  a au moins un point fixe dans  $C_{\tilde{a}'}$ . Ainsi, le sous-groupe de  $W_{\tilde{\psi}}$  engendré par les éléments ayant au moins un point fixe dans  $C_{\tilde{a}}$  ne dépend pas du choix du point géométrique  $\tilde{a}$ .  $\square$

On obtient donc une application  $\tilde{\psi} \mapsto (I_{\tilde{\psi}}, W_{\tilde{\psi}})$  de  $\tilde{\Psi}$  dans l'ensemble des couples formés d'un sous-groupe  $W_*$  de  $\mathbb{W} \rtimes \Theta_\rho$  et d'un sous-groupe normal  $I_*$  de  $W_* \cap \mathbb{W}$ . Cette application est équivariante par rapport à l'action par conjugaison de  $\mathbb{W}$ . On en déduit par passage au quotient une application de  $\tilde{\Psi}/\mathbb{W}$  dans l'ensemble des classes de  $\mathbb{W}$ -conjugaison des couples  $(I_*, W_*)$ . On a ainsi défini une application  $\psi \mapsto [I_\psi, W_\psi]$  sur le sous-ensemble de  $\tilde{\Psi}$  des strates  $\mathcal{A}_\psi$  ayant une intersection non vide avec  $\mathcal{A}^\infty$ . On vérifie sans difficulté que ces applications sont compatibles pour les choix différents de  $\infty$  et donc se recollent en une application  $\psi \mapsto [I_\psi, W_\psi]$  défini sur l'ensemble  $\Psi$  tout entier.

Il existe une relation d'ordre évident sur l'ensemble des couples  $(I_*, W_*)$  définie par  $(I_1, W_1) \leq (I_2, W_2)$  si et seulement si  $I_1 \subset I_2$  et  $W_1 \subset W_2$ .

Elle induit une relation d'ordre sur l'ensemble des classes de conjugaison  $[I_*, W_*]$  définie par  $[I_1, W_1] \leq [I_2, W_2]$  si et seulement s'il existe  $w \in \mathbb{W} \rtimes \Theta$  tel que  $wI_1w^{-1} \subset I_2$  et  $wW_1w^{-1} \subset W_2$ .

**Lemme 5.6.2.** — *L'application  $\tilde{\psi} \mapsto (I_{\tilde{\psi}}, W_{\tilde{\psi}})$  est croissante. Il en est de même de l'application  $\psi \mapsto [I_{\psi}, W_{\psi}]$ .*

*Démonstration.* — On raisonne comme dans la démonstration de 5.3.1. Soit  $S = \text{Spec}(R)$  un trait formel de point générique  $\eta = \text{Spec}(k(\eta))$  et de point fermé  $s = \text{Spec}(k(s))$  géométrique. Soit  $\tilde{a} : S \rightarrow \tilde{\mathcal{A}}$  un morphisme avec  $\tilde{a}(\eta) \in \tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{\psi}}$  et  $\tilde{a}(s) \in \tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{\psi}'}$ . On doit démontrer que  $(I_{\tilde{\psi}}, W_{\tilde{\psi}}) \geq (I_{\tilde{\psi}'}, W_{\tilde{\psi}'})$ .

Considérons le revêtement  $\tilde{X}_{\rho,a}$  de  $X \times S$  qui est défini comme l'image réciproque par  $a$  du revêtement  $X_{\rho} \times \mathbb{t}_D \rightarrow \mathfrak{c}_D$ . Considérons la normalisation  $\tilde{X}_{\rho,a}^b$  de  $\tilde{X}_{\rho,a}$ . Quitte à faire un changement radiciel du trait, on peut supposer que la fibre générique  $(\tilde{X}_{\rho,a}^b)_{\eta}$  est une courbe lisse sur  $k(\eta)$  de sorte qu'on peut calculer  $(I_{\tilde{\psi}}, W_{\tilde{\psi}})$  à partir de cette fibre générique. En revanche, la fibre spéciale  $(\tilde{X}_{\rho,a}^b)_s$  n'est pas normale en général et il faut prendre sa normalisation  $(\tilde{X}_{\rho,a}^b)_s^b$  pour calculer  $(I_{\tilde{\psi}'}, W_{\tilde{\psi}'})$ .

Le point  $\tilde{a}$  définit une section de  $(\tilde{X}_{\rho,a}^b)_{\eta}$ . Notons  $C_{\tilde{a}}$  la composante connexe de  $(\tilde{X}_{\rho,a}^b)_{\eta}$  contenant cette section. Le groupe  $W_{\tilde{\psi}}$  est alors le sous-groupe de  $\mathbb{W} \rtimes \Theta_{\rho}$  formé des éléments qui laissent stable cette composante. Soit  $C_{\tilde{a}(s)}$  la composante connexe de  $(\tilde{X}_{\rho,a}^b)_s^b$  contenant le point défini par  $\tilde{a}(s)$ . Le groupe  $W_{\tilde{\psi}'}$  est le sous-groupe de  $\mathbb{W} \rtimes \Theta_{\rho}$  formé des éléments qui laissent stable  $C_{\tilde{a}(s)}$ . Comme  $C_{\tilde{a}(s)}$  est une composante connexe de la normalisation de la fibre spéciale de  $C_{\tilde{a}}$ , on a une inclusion  $W_{\tilde{\psi}'} \subset W_{\tilde{\psi}}$ . Un élément de  $W_{\tilde{\psi}'}$  ayant un point fixe dans  $C_{\tilde{a}(s)}$  a nécessairement un point fixe dans  $C_{\tilde{a}}$  d'où la seconde inclusion  $I_{\tilde{\psi}'} \subset I_{\tilde{\psi}}$ .  $\square$

Pour tout  $(I_*, W_*)$  comme ci-dessus, notons  $\tilde{\mathcal{A}}_{(I_*, W_*)}$  la réunion des strates  $\mathcal{A}_{\tilde{\psi}}$  telles que  $(I_{\tilde{\psi}}, W_{\tilde{\psi}}) \leq (I_*, W_*)$ . D'après 5.6.2, c'est une partie localement fermée de  $\tilde{\mathcal{A}}$ . On obtient ainsi une stratification de  $\tilde{\mathcal{A}}$

$$(5.6.3) \quad \tilde{\mathcal{A}} = \bigsqcup_{(I_*, W_*)} \tilde{\mathcal{A}}_{(I_*, W_*)}$$

De même, on a une stratification compatible de  $\mathcal{A}^\heartsuit$

$$(5.6.4) \quad \mathcal{A}^\heartsuit \otimes_k \bar{k} = \bigsqcup_{[I_*, W_*]} \mathcal{A}_{[I_*, W_*]}$$

**Lemme 5.6.5.** — *Considérons une réduction de la restriction de  $\rho_G$  à  $\bar{X}$  à un tore irréductible  $\bar{\rho} : X_{\bar{\rho}} \rightarrow \bar{X}$  sous un groupe  $\Theta_{\bar{\rho}}$ . Considérons les invariants monodromiques relatifs à cette réduction. Soit  $\tilde{\psi}_G$  l'élément maximal de  $\tilde{\Psi}$ . On a alors*

$$(I_{\tilde{\psi}_G}, W_{\tilde{\psi}_G}) = (\mathbb{W}, \mathbb{W} \rtimes \Theta_{\bar{\rho}}).$$

De même, on a  $[I_{\psi_G}, W_{\psi_G}] = [\mathbb{W}, \mathbb{W} \rtimes \Theta_{\bar{\rho}}]$  où  $\psi_G$  est l'élément maximal de  $\Psi$ .

*Démonstration.* — Soit  $\tilde{a} = (a, \tilde{\infty})$  un  $\bar{k}$ -point de la strate ouverte  $\tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{\psi}_G}$ . D'après cf. 4.6.4,  $\tilde{X}_{\bar{\rho}, a}$  est alors une courbe lisse et irréductible. On en déduit que  $W_{\tilde{a}} = \mathbb{W} \rtimes \Theta_{\bar{\rho}}$ .

Le sous-groupe normal  $I_{\tilde{a}}$  de  $W_{\tilde{a}}$  est alors un sous-groupe normal de  $W$ . La courbe  $\tilde{X}_{\bar{\rho}, a}$  coupe transversalement tous les murs de  $\mathbb{h}_\alpha$  dans  $X_{\bar{\rho}} \times \mathfrak{t}$  associés aux racines  $\alpha$  de  $\mathfrak{g}$ , le groupe  $I_{\tilde{a}}$  est un sous-groupe normal de  $\mathbb{W}$  contenant toutes les réflexions  $s_\alpha$  associés au mur  $h_\alpha$ . Il s'ensuit que  $I_{\tilde{a}} = \mathbb{W}$ .  $\square$

Sous l'hypothèse du lemme, on a un ouvert dense  $\mathcal{A}_{[\mathbb{W}, \mathbb{W} \rtimes \Theta_{\bar{\rho}}]}$  de  $\mathcal{A}$ . En général, il contient strictement la grosse strate  $\mathcal{A}^\diamond = \mathcal{A}_{\psi_G}$ . En effet, dans la strate  $\mathcal{A}_{[\mathbb{W}, \mathbb{W} \rtimes \Theta]}$ , on demande à la courbe camérale  $\tilde{X}_{\bar{\rho}, a}$  d'être irréductible alors que dans  $\mathcal{A}^\diamond$ , celle-ci doit être lisse et irréductible.

**5.7. Description de  $\pi_0(\mathcal{P})$ .** — Dans ce paragraphe, on va décrire le faisceau  $\pi_0(\mathcal{P})$  le long des strates  $\mathcal{A}_{I_*, W_*}$  de la stratification 5.6.4. Rappelons la définition de ce faisceau. Le champ de Picard  $\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{A}^\heartsuit$  étant lisse 4.4.2, il existe un unique faisceau  $\pi_0(\mathcal{P})$  pour la topologie étale de  $\mathcal{A}^\heartsuit$  tel que la fibre de  $\pi_0(\mathcal{P})$  en un point  $a \in \mathcal{A}^\heartsuit(\bar{k})$  est le groupe  $\pi_0(\mathcal{P}_a)$  des composantes connexes de  $\mathcal{P}_a$ . Ceci est une conséquence d'un théorème de Grothendieck cf. [27, 15.6.4], voir aussi [55, 6.2].

On va aussi considérer le problème intermédiaire de déterminer le faisceau  $\pi_0(\mathcal{P}')$  des composante connexes du champ de Picard  $\mathcal{P}'$  dont la fibre en chaque point  $a \in \mathcal{A}^\heartsuit(\bar{k})$  classifie des  $J_a^0$  toseurs sur  $\bar{X}$ . L'homomorphisme surjectif  $\mathcal{P}' \rightarrow \mathcal{P}$  induit un homomorphisme surjectif  $\pi_0(\mathcal{P}') \rightarrow \pi_0(\mathcal{P})$ .

On commence par regarder la restriction de ces faisceaux à l'ouvert étale  $\tilde{\mathcal{A}}$  de  $\mathcal{A}^\heartsuit$  cf. 5.5. Cet ouvert dépend du choix d'un point  $\infty \in X(\bar{k})$ . On a une stratification (5.6.3)

$$\tilde{\mathcal{A}} = \bigsqcup_{(I_*, W_*)} \tilde{\mathcal{A}}_{(I_*, W_*)}$$

par les invariants monodromiques avec  $I_* \subset W_* \subset \mathbb{W} \rtimes \Theta_\rho$ . On a aussi fixé une réduction du  $\text{Out}(\mathbb{G})$ -torseur  $\rho_G$  en un toseur  $\rho : X_\rho \rightarrow X$  sous le groupe  $\Theta_\rho$  muni d'un point géométrique  $\infty_\rho$  de  $X_\rho$  au-dessus de  $\infty$ . Ceci permet en particulier d'identifier la fibre  $W_\infty$  de  $W$  en  $\infty$  avec  $\mathbb{W}$ .

D'après 4.10.2, pour tout point  $\tilde{a} \in \tilde{\mathcal{A}}(\bar{k})$ , la fibre de  $\pi_0(P'_a)$  s'exprime

$$\pi_0(\mathcal{P}'_a) = (\hat{\mathbb{T}}^{W_{\tilde{a}}})^*$$

où l'exposant  $(\_)^*$  désigne la dualité entre les groupes abéliens de type finis et les groupes diagonalisables de type fini sur  $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$ . De même,  $\pi_0(\mathcal{P}_a)$  s'identifie au quotient de  $\pi_0(\mathcal{P}'_a)$  dual au sous-groupe  $\hat{\mathbb{T}}(I_{\tilde{a}}, W_{\tilde{a}})$  défini dans 4.10.2. L'énoncé suivant permet de déterminer complètement la restriction des faisceaux  $\pi_0(\mathcal{P}')$  et  $\pi_0(\mathcal{P})$  à  $\tilde{\mathcal{A}}$ .

**Proposition 5.7.1.** — *Les flèches surjectives de la proposition 4.10.2*

$$\mathbb{X}_* \rightarrow \pi_0(\mathcal{P}'_a) = (\mathbb{X}_*)_{W_{\tilde{a}}}$$

définies pour tout  $\tilde{a} = (a, \tilde{\infty}) \in \tilde{\mathcal{A}}(\bar{k})$  s'interpolent en un homomorphisme surjectif canonique du faisceau constant de valeur  $\mathbb{X}_*$  sur  $\tilde{\mathcal{A}}$  dans  $\pi_0(\mathcal{P}')|_{\tilde{\mathcal{A}}}$ .

*Démonstration.* — Soit  $\tilde{a} = (a, \tilde{\infty}) \in \tilde{\mathcal{A}}(\bar{k})$ . Le point géométrique  $\tilde{\infty}_\rho = (\tilde{\infty}, \infty_\rho)$  de  $\tilde{X}_{\rho,a}$  permet d'identifier la fibre de  $J_a$  en  $\infty$  avec le tore fixe  $\mathbb{T}$  cf. 2.4.7. Cette identification permet de définir un homomorphisme du faisceau constant sur  $\tilde{\mathcal{A}}$  de valeur le groupe  $\mathbb{X}_*$  des cocaractères de  $\mathbb{T}$  dans l'image réciproque de  $\mathcal{P}'$  sur  $\tilde{\mathcal{A}}$ , voir la démonstration de [55, 6.8] et donc un homomorphisme

$$\mathbb{X}_* \times \tilde{\mathcal{A}} \rightarrow \pi_0(\mathcal{P}')|_{\tilde{\mathcal{A}}}.$$

Fibre par fibre c'est l'homomorphisme surjectif de 4.10.2.  $\square$

**Remarque 5.7.2.** — Notons que cet homomorphisme surjectif dépend du choix du  $\bar{k}$ -point  $\infty_\rho$ . Il est défini sur  $k$  si le point  $\infty_\rho$  est défini sur  $k$ . Notons que  $\infty_\rho$  est défini sur  $k$  entraîne que  $\infty$  est aussi défini sur  $k$ .

Dans le langage des représentations du groupe fondamental, il revient au même de dire que l'homomorphisme

$$\rho^\bullet : \pi_1(X, \infty) = \pi_1(\bar{X}, \infty) \rtimes \text{Gal}(\bar{k}/k) \rightarrow \Theta_\rho$$

défini à partir de  $\infty_\rho$  est trivial sur le facteur  $\text{Gal}(\bar{k}/k)$ .

A l'aide de ce lemme, on obtient une description explicite des restrictions de  $\pi_0(\mathcal{P}')$  et de  $\pi_0(\mathcal{P})$  à  $\tilde{\mathcal{A}}$ . Pour tout ouvert étale  $U$  de  $\tilde{\mathcal{A}}$ , la stratification (5.6.3) induit sur  $U$  une stratification

$$U = \bigsqcup_{(I_*, W_*)} U_{(I_*, W_*)}.$$

Pour tout couple  $(I_1, W_1)$  formé d'un sous-groupe  $W_1$  de  $\mathbb{W} \rtimes \Theta$  et d'un sous-groupe normal  $I_1$  de  $W_1$ ,  $U$  sera dit un petit ouvert de type  $(I_1, W_1)$  si  $U_{(I_1, W_1)}$  est l'unique strate fermée non vide dans la stratification ci-dessus. Il est clair que les petits ouverts de différents types forment une base de la topologie étale de  $\tilde{\mathcal{A}}$  dans le sens que tout ouvert peut être recouvert par une famille de petits ouverts. Pour définir un faisceau pour la topologie étale de  $\tilde{\mathcal{A}}$ , il suffit donc de spécifier ses sections sur les petits ouverts et les flèches de transition.

Considérons les faisceaux  $\Pi'$  et  $\Pi$  définis comme suit. Pour un petit ouvert  $U_1$  de type  $(I_1, W_1)$ , on pose

$$\begin{aligned} \Gamma(U, \Pi') &= (\hat{\mathbb{T}}^{W_1})^* = (\mathbb{X}_*)_{W_1} \\ \Gamma(U, \Pi) &= \hat{\mathbb{T}}(I_1, W_1)^* \end{aligned}$$

Soit  $U_2$  un petit ouvert étale de  $U_1$  de type  $(I_2, W_2)$ . Puisque  $U_{(I_1, W_1)}$  est l'unique strate fermée non vide de  $U_1$ , on a l'inégalité

$$(I_1, W_1) \leq (I_2, W_2).$$

On a alors une inclusion évidente des sous-groupes des invariants de  $\hat{\mathbb{T}}$  sous  $W_1$  et  $W_2$

$$\hat{\mathbb{T}}^{W_2} \subset \hat{\mathbb{T}}^{W_1}$$

d'où la flèche de transition

$$\Gamma(U_1, \Pi') \rightarrow \Gamma(U_2, \Pi').$$

La définition des flèches de transition du faisceau  $\Pi$  résulte du lemme suivant.

**Lemme 5.7.3.** — Si  $(I_1, W_1) \leq (I_2, W_2)$ , on a l'inclusion

$$\hat{\mathbb{T}}(I_2, W_2) \subset \hat{\mathbb{T}}(I_1, W_1).$$

*Démonstration.* — Soient  $\kappa$  un élément de  $\hat{\mathbb{T}}$ ,  $\hat{\mathbb{G}}_\kappa$  son centralisateur dans  $\hat{\mathbb{G}}$  et  $\hat{\mathbb{H}}$  la composante neutre de celui-ci. Soient  $(\mathbb{W} \rtimes \Theta)_\kappa$  le centralisateur de  $\kappa$  dans  $\mathbb{W} \rtimes \Theta$  et  $\mathbb{W}_{\mathbb{H}}$  le groupe de Weyl de  $\hat{\mathbb{H}}$ . Si  $\kappa \in \hat{\mathbb{T}}(I_2, W_2)$  alors  $I_2 \subset \mathbb{W}_{\mathbb{H}}$  et  $W_2 \subset (\mathbb{W} \rtimes \Theta)_\kappa$ . On en déduit que  $I_1 \subset \mathbb{W}_{\mathbb{H}}$  et  $W_1 \subset (\mathbb{W} \rtimes \Theta)_\kappa$ .  $\square$

L'action de  $\mathbb{W}$  sur  $\tilde{\mathcal{A}}$  se relève de façon évidente sur les faisceaux  $\Pi$  et  $\Pi'$ . Le morphisme  $\tilde{\mathcal{A}} \rightarrow \mathcal{A}^\infty$  étant un morphisme fini étale galoisien de groupe de Galois  $\mathbb{W}$ , les faisceaux  $\Pi$  et  $\Pi'$  descendent donc à l'ouvert  $\mathcal{A}^\infty$  de  $\mathcal{A}^\heartsuit$ . Désignons encore par  $\Pi$  et  $\Pi'$  les faisceaux ainsi définis sur  $\mathcal{A}^\infty$ .

L'énoncé suivant est une conséquence immédiate de 5.7.1 et 4.10.2.

**Corollaire 5.7.4.** — Il existe un isomorphisme canonique entre la restriction de  $\pi_0(\mathcal{P}')$ , à  $\mathcal{A}^\infty$  et  $\Pi'$ . De même, on a  $\pi_0(\mathcal{P})|_{\mathcal{A}^\infty} = \Pi$ .

Les ouverts de  $\mathcal{A}^\infty$  de  $\mathcal{A}^\heartsuit$  recouvrent  $\mathcal{A}^\heartsuit$  de sorte que l'énoncé ci-dessus fournit une description complète des faisceaux  $\pi_0(\mathcal{P})$  et  $\pi_0(\mathcal{P}')$ . En particulier, on a l'énoncé suivant.

**Corollaire 5.7.5.** — Considérons une réduction de la restriction de  $\rho_G$  à  $\bar{X}$  à un tore irréductible  $\bar{\rho} : X_{\bar{\rho}} \rightarrow \bar{X}$  sous un groupe discret  $\Theta_{\bar{\rho}}$ . Considérons les invariants monodromiques relatifs à cette réduction. La restriction de  $\pi_0(\mathcal{P})$  à l'ouvert  $\mathcal{A}^\diamond \otimes_k \bar{k}$  de 4.6 est le faisceau constant de valeur  $(Z_{\hat{\mathbb{G}}}^{\Theta_{\bar{\rho}}})^*$ . Ici  $Z_{\hat{\mathbb{G}}}^{\Theta_{\bar{\rho}}}$  désigne le sous-groupe des éléments  $\Theta_{\bar{\rho}}$ -invariants dans le centre  $Z_{\hat{\mathbb{G}}}$  de  $\hat{\mathbb{G}}$ .

*Démonstration.* — Rappelons que  $\mathcal{A}^\diamond$  coïncide avec la strate ouverte  $\mathcal{A}_{\psi_G}$  pour l'élément maximal  $\psi_G$  de  $\Psi$ . Le corollaire est une conséquence de l'égalité  $(I_{\tilde{\psi}_G}, W'_{\tilde{\psi}_G}) = (\mathbb{W}, \mathbb{W} \rtimes \Theta_{\bar{\rho}})$  cf. 5.6.5. En effet, on peut vérifier que

$$\hat{\mathbb{T}}(\mathbb{W}, \mathbb{W} \rtimes \Theta_{\bar{\rho}}) = Z_{\hat{\mathbb{G}}}^{\Theta_{\bar{\rho}}}.$$

en prenant une extension centrale  $\hat{\mathbb{G}}' \rightarrow \hat{\mathbb{G}}$  avec un group dérivé simplement connexe munie d'une action équivariante de  $\Theta_{\bar{\rho}}$ .  $\square$

## 6. Cohomologie au-dessus de l'ouvert anisotrope

Dans ce chapitre, nous allons introduire l'ouvert  $\mathcal{A}^{\text{ani}}$  de  $\mathcal{A}$  au-dessus duquel la fibration de Hitchin  $f^{\text{ani}} : \mathcal{M}^{\text{ani}} \rightarrow \mathcal{A}^{\text{ani}}$  est un morphisme propre, en particulier de type fini. Comme  $\mathcal{M}^{\text{ani}}$  est un champ de Deligne-Mumford lisse, en appliquant le théorème de pureté de Deligne, on obtient la pureté du complexe  $f_*^{\text{ani}} \overline{\mathbb{Q}}_\ell$ .

Suivant [55], on étudie la décomposition des faisceaux pervers de cohomologie  ${}^p\text{H}^n(f_*^{\text{ani}} \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$  sous l'action du faisceau  $\pi_0(\mathcal{P})$  dont la restriction à  $\mathcal{A}^{\text{ani}}$  est un faisceau de groupes abéliens finis. La décomposition prendra une forme plus agréable après le changement de base à l'ouvert étale  $\tilde{\mathcal{A}}^{\text{ani}}$  au-dessus duquel  $\pi_0(\mathcal{P})$  est un quotient du faisceau constant de valeur le groupe  $\mathbb{X}_*$  des cocaractères du tore fixe  $\mathbb{T}$ . En particulier, au-dessus de  $\tilde{\mathcal{A}}^{\text{ani}}$ , on n'a plus besoin du formalisme des co-faisceaux qui a été introduit dans [55] pour écrire la décomposition endoscopique sur  $\mathcal{A}^{\text{ani}}$ .

Pour chaque  $\kappa \in \hat{\mathbb{T}}$ , on définit le fermé  $\tilde{\mathcal{A}}_\kappa$  de  $\tilde{\mathcal{A}}$  où  $\kappa : \mathbb{X}_* \rightarrow \overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times$  se factorise par  $\pi_0(\mathcal{P}_a)$ . L'intersection  $\tilde{\mathcal{A}}_\kappa \cap \tilde{\mathcal{A}}^{\text{ani}}$  est vide sauf pour les  $\kappa$  dans un ensemble fini qu'on notera  $\kappa^{\text{ani}}$ . Pour  $\kappa \in \kappa^{\text{ani}}$ , on a un facteur direct  ${}^p\text{H}^n(f_*^{\text{ani}} \overline{\mathbb{Q}}_\ell)_\kappa$  supporté par  $\tilde{\mathcal{A}}_\kappa \cap \tilde{\mathcal{A}}^{\text{ani}}$ . On donnera une description de  $\tilde{\mathcal{A}}_\kappa$  en termes des groupes endoscopiques.

Le point important de ce chapitre est l'énoncé du théorème de stabilisation géométrique 6.4.3. Il s'agit d'une égalité dans le groupe Grothendieck de deux complexes purs sur  $\tilde{\mathcal{A}}_H$ . Cet énoncé implique le lemme fondamental de Langlands et Shelstad 1.11.1 et le reste de l'article sera consacré à sa démonstration.

Notons que le vrai énoncé de stabilisation géométrique qui correspond à la stabilisation usuelle du côté géométrique de la formule des traces, devrait être sur  $\mathcal{A}^{\text{ani}}$  au lieu de  $\tilde{\mathcal{A}}^{\text{ani}}$ . Cet énoncé est nettement plus compliqué et nécessite en particulier le formalisme peu familier des co-faisceaux de [55]. Mais il n'est rien d'autre que la descente de 6.4.3 de  $\tilde{\mathcal{A}}_H$  à  $\mathcal{A}_H^{\text{ani}}$ . Nous le laisserons au lecteur comme exercice.

**6.1. L'ouvert anisotrope.** — Considérons le sous-ensemble  $\Psi^{\text{ani}}$  de  $\Psi$  des éléments  $\psi \in \Psi$  tels que le groupe des  $W_\psi$ -coinvariants de  $\mathbb{X}_*$  est un groupe fini. Il revient au même de dire que le sous-groupe des  $W_\psi$ -invariants dans  $\mathbb{X}_*$  est trivial. Le groupe  $W_\psi$  est seulement défini modulo  $\mathbb{W}$ -conjugaison mais la finitude des coinvariants est bien une propriété invariante de sorte que  $\Psi^{\text{ani}}$  est un sous-ensemble bien défini de

$\Psi$ . Considérons la réunion

$$\mathcal{A}^{\text{ani}} = \bigsqcup_{\psi \in \Psi^{\text{ani}}} \mathcal{A}_{\psi}.$$

D'après 5.6.2,  $\mathcal{A}^{\text{ani}}$  est un ouvert de  $\mathcal{A}$ . Sous les hypothèses que le centre de  $G$  ne contient pas de tore déployé sur  $\bar{X}$  et que  $\deg(D) > 2g$ ,  $\mathcal{A}^{\text{ani}}$  contient la grosse strate  $\mathcal{A}^{\diamond}$  qui est non vide cf. 4.6.1, de sorte que  $\mathcal{A}^{\text{ani}}$  est aussi non vide.

**Lemme 6.1.1.** —  $\mathcal{A}^{\text{ani}}(\bar{k})$  est le sous-ensemble de  $\mathcal{A}^{\heartsuit}(\bar{k})$  formés des points  $a \in \mathcal{A}^{\heartsuit}(\bar{k})$  tels que  $\pi_0(\mathcal{P}_a)$  est fini.

*Démonstration.* — D'après 4.10.2,  $a \in \mathcal{A}^{\text{ani}}(\bar{k})$  si et seulement si  $\pi_0(\mathcal{P}'_a)$  est un groupe fini. Le lemme résulte du fait que  $\pi_0(\mathcal{P}'_a) \rightarrow \pi_0(\mathcal{P}_a)$  est un homomorphisme surjectif de noyau fini cf. 4.10.1.  $\square$

**Lemme 6.1.2.** — Soit  $a \in \mathcal{A}^{\text{ani}}(\bar{k})$  et  $(E, \phi) \in \mathcal{M}_a(\bar{k})$ . Alors le groupe des automorphismes  $\text{Aut}(E, \phi)$  est un groupe fini. En tant que  $\bar{k}$ -schéma en groupes, il est réduit.

*Démonstration.* — La finitude est une conséquence immédiate de 4.11.2. En tant que  $\bar{k}$ -schéma en groupes, il est contenu dans le sous-groupe des points fixes d'un sous-groupe de  $\mathbb{W}$  agissant sur  $\mathbb{T}$ . Ce dernier est réduit car  $p$  ne divise l'ordre de  $\mathbb{W}$ .  $\square$

**6.1.3.** — Dans [20, II.4], Faltings a démontré le théorème de réduction semi-stable pour les fibrés de Higgs qui dit qu'un fibré de Higgs semi-stable sur  $X$  à coefficients dans le corps des fractions d'un anneau des valuation discrète peut s'étendre en un fibré de Higgs sur l'anneau après une extension finie séparable et de plus, si le fibré de Higgs dans la fibre spéciale est stable, cette extension est unique. Nous renvoyons à [20] pour la définition des fibrés de Higgs semi-stables et stables. Disons seulement que c'est exactement la même définition que pour les  $G$ -torseurs sauf qu'on ne considère que les réductions paraboliques de  $E$  compatibles avec le champ de Higgs  $\phi$ . Ceci suffit pour démontrer le lemme suivant.

**Lemme 6.1.4.** — Soit  $a \in \mathcal{A}^{\text{ani}}(\bar{k})$  et  $(E, \varphi) \in \mathcal{M}^{\text{ani}}(\bar{k})$ . Alors  $(E, \phi)$  est stable.

*Démonstration.* — Puisque  $a \in \mathcal{A}^{\text{ani}}(\bar{k})$ ,  $E$  n'a pas de réduction parabolique compatible à  $\phi$ .  $\square$



**Proposition 6.1.5.** — *La restriction  $\mathcal{P}^{\text{ani}}$  du champ de Picard  $\mathcal{P}$  à  $\mathcal{A}^{\text{ani}}$  est un champ de Deligne-Mumford séparé lisse de type fini au-dessus de  $\mathcal{A}^{\text{ani}}$ . L'ouvert  $\mathcal{M}^{\text{ani}} := \mathcal{M} \times_{\mathcal{A}} \mathcal{A}^{\text{ani}}$  de  $\mathcal{M}$  est un champ de Deligne-Mumford séparé lisse de type fini au-dessus de  $k$ . Le morphisme  $f^{\text{ani}} : \mathcal{M}^{\text{ani}} \rightarrow \mathcal{A}^{\text{ani}}$  est un morphisme propre.*

*Démonstration.* — On sait déjà que  $\mathcal{P}$  est un champ de Picard lisse au-dessus de  $\mathcal{A}^{\heartsuit}$  cf. 4.4.2 et  $\mathcal{M}$  est lisse sur  $k$  cf. 4.12.1.

D'après [20, II.4] et 6.1.4,  $\mathcal{M}^{\text{ani}}$  est séparé. Autrement dit le morphisme diagonal de  $\mathcal{M}^{\text{ani}}$  est universellement fermé. D'après 6.1.2, il est quasi-fini et de fibres réduites. On en déduit qu'il est fini et non ramifié. Par conséquent  $\mathcal{M}^{\text{ani}}$  est un champ de Deligne-Mumford séparé. Il en est de même de  $\mathcal{P}^{\text{ani}}$  car  $\mathcal{P}^{\text{ani}}$  s'identifie à un ouvert de  $\mathcal{M}^{\text{ani}}$ .

Il reste à démontrer que  $\mathcal{P}$  est de type fini et  $\mathcal{M}$  est propre sur  $\mathcal{A}^{\text{ani}}$ . Disposant du critère valuatif de propreté cf. [20, II.4], il suffit de démontrer qu'il est de type fini sur  $\mathcal{A}^{\text{ani}}$ . On sait que  $\mathcal{M}$  est localement de type fini. Pour tout  $a \in \mathcal{A}^{\text{ani}}(\bar{k})$ , on peut choisir une famille d'ouverts de type fini de  $\mathcal{M}^{\text{ani}}$  qui recouvrent la fibre  $\mathcal{M}^{\text{ani}}$ . D'après la formule de produit 4.13.1, la fibre  $\mathcal{M}_a$  est noethérienne si bien qu'il existe une famille finie d'ouverts de type fini de  $\mathcal{M}^{\text{ani}}$  qui recouvre  $\mathcal{M}_a$ . Puisque  $f : \mathcal{M}^{\text{ani}} \rightarrow \mathcal{A}^{\text{ani}}$  est plat, l'image de ces ouverts de  $\mathcal{A}^{\text{ani}}$  sont des ouverts de  $\mathcal{A}^{\text{ani}}$  contenant  $a$ . Soit  $V_a$  leur intersection. Il est clair que l'ouvert  $f^{-1}(V_a)$  peut être recouvert par une famille finie d'ouverts de type fini. Il reste à remarquer que  $\mathcal{A}^{\text{ani}}$  est aussi noethérien de sorte qu'il existe un nombre fini de points  $a$  tels que les ouverts  $V_a$  comme ci-dessus recouvrent  $\mathcal{A}^{\text{ani}}$ . La proposition s'en déduit.  $\square$

**6.2. La  $\kappa$ -décomposition sur  $\tilde{\mathcal{A}}^{\text{ani}}$ .** — Le morphisme

$$f^{\text{ani}} : \mathcal{M}^{\text{ani}} \rightarrow \mathcal{A}^{\text{ani}}$$

est un morphisme propre. Sa source  $\mathcal{M}^{\text{ani}}$  est un champ de Deligne-Mumford lisse. D'après le théorème de pureté de Deligne [16],  $f_*^{\text{ani}} \overline{\mathbb{Q}}_{\ell}$  est un complexe pur. D'après [6, 5.4.5], il est isomorphe à la somme directe de ses faisceaux pervers de cohomologie

$$f_*^{\text{ani}} \simeq \bigoplus_n {}^p H^n(f_*^{\text{ani}} \overline{\mathbb{Q}}_{\ell})[-n].$$

où  ${}^p H^n(f_*^{\text{ani}} \overline{\mathbb{Q}}_{\ell})$  est un faisceau pervers pur de poids  $n$ .

**6.2.1.** — Puisque  $\mathcal{P}^{\text{ani}}$  agit sur  $\mathcal{M}^{\text{ani}}$  au-dessus de  $\mathcal{A}^{\text{ani}}$ ,  $\mathcal{P}^{\text{ani}}$  agit sur l'image directe  $f_*^{\text{ani}}\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ . D'après le lemme d'homotopie cf. [52, 3.2.3], l'action de  $\mathcal{P}^{\text{ani}}$  sur les faisceaux pervers de cohomologie  ${}^p\text{H}^n(f_*^{\text{ani}}\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$  se factorise par le faisceau en groupes abéliens finis  $\pi_0(\mathcal{P}^{\text{ani}})$ . Pour comprendre cette action, il est commode de se restreindre d'abord à l'ouvert étale  $\tilde{\mathcal{A}}^{\text{ani}} = \tilde{\mathcal{A}} \times_{\mathcal{A}} \mathcal{A}^{\text{ani}}$  avec  $\tilde{\mathcal{A}}$  défini dans le paragraphe 5.5.

**6.2.2.** — Au-dessus de  $\tilde{\mathcal{A}}$ , on a l'homomorphisme surjectif 5.7.1

$$\mathbb{X}_* \times \tilde{\mathcal{A}} \rightarrow \pi_0(\mathcal{P})|_{\tilde{\mathcal{A}}}.$$

Notons  $\tilde{\mathcal{A}}^{\text{ani}}$  l'image réciproque de  $\mathcal{A}^{\text{ani}}$  à  $\tilde{\mathcal{A}}$  et  $\tilde{f}^{\text{ani}}$  celle du morphisme  $f^{\text{ani}}$ . Au-dessus de l'ouvert  $\tilde{\mathcal{A}}^{\text{ani}}$ , l'homomorphisme  $\mathbb{X}_* \rightarrow \pi_0(\mathcal{P})|_{\tilde{\mathcal{A}}}$  se factorise par un quotient fini de sorte que pour tout  $\kappa \in \hat{\mathbb{T}}$ , on peut définir un facteur direct

$${}^p\text{H}^n(\tilde{f}_*^{\text{ani}}\overline{\mathbb{Q}}_\ell)_\kappa$$

sur lequel  $\mathbb{X}_*$  agit à travers le caractère  $\kappa : \mathbb{X}_* \rightarrow \overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times$ .

**6.2.3.** — Pour tout  $\kappa \in \hat{\mathbb{T}}$ , soit  $\tilde{\mathcal{A}}_\kappa$  la réunion des strates  $\tilde{\mathcal{A}}_{\tilde{\psi}}$  avec  $\tilde{\psi} \in \Psi$  et  $\kappa \in \hat{\mathbb{T}}(I_{\tilde{\psi}}, W_{\tilde{\psi}})$ . D'après 5.7.3 et 5.6.2,  $\tilde{\mathcal{A}}_\kappa$  est un fermé de  $\tilde{\mathcal{A}}$ .

**6.2.4.** — Nous notons  $\kappa^{\text{ani}}$  le sous-ensemble de  $\hat{\mathbb{T}}$  formé des éléments  $\kappa \in \hat{\mathbb{T}}$  tel que  $\kappa \in \hat{\mathbb{T}}(I_{\tilde{\psi}}, W_{\tilde{\psi}})$  pour une certaine strate anisotrope  $\tilde{\psi} \in \tilde{\Psi}^{\text{ani}}$ . Comme  $\tilde{\Psi}^{\text{ani}}$  est un ensemble fini et pour tout  $\tilde{\psi} \in \tilde{\Psi}^{\text{ani}}$ ,  $\hat{\mathbb{T}}(I_{\tilde{\psi}}, W_{\tilde{\psi}})$  est un sous-groupe fini de  $\hat{\mathbb{T}}$ , l'ensemble  $\kappa^{\text{ani}}$  est un sous-ensemble fini de  $\hat{\mathbb{T}}$ . Le facteur direct  ${}^p\text{H}^n(\tilde{f}_*^{\text{ani}}\overline{\mathbb{Q}}_\ell)_\kappa$  est non nul seulement si  $\kappa \in \kappa^{\text{ani}}$ . On a donc une décomposition en somme directe finie

$$(6.2.5) \quad {}^p\text{H}^n(\tilde{f}_*^{\text{ani}}\overline{\mathbb{Q}}_\ell) = \bigoplus_{\kappa \in \kappa^{\text{ani}}} {}^p\text{H}^n(\tilde{f}_*^{\text{ani}}\overline{\mathbb{Q}}_\ell)_\kappa.$$

**Proposition 6.2.6.** — *Le support du faisceau pervers  ${}^p\text{H}^n(\tilde{f}_*^{\text{ani}}\overline{\mathbb{Q}}_\ell)_\kappa$  est contenu dans  $\tilde{\mathcal{A}}_\kappa \cap \mathcal{A}^{\text{ani}}$ . L'intersection  $\tilde{\mathcal{A}}_\kappa \cap \tilde{\mathcal{A}}^{\text{ani}}$  est non vide si et seulement si  $\kappa$  est un élément de l'ensemble fini  $\kappa^{\text{ani}}$ .*

*Démonstration.* — D'après la description de  $\pi_0(\mathcal{P})$  sur  $\tilde{\mathcal{A}}$ , au-dessus de l'ouvert  $U = \tilde{\mathcal{A}}^{\text{ani}} - \tilde{\mathcal{A}}_\kappa$ , l'homomorphisme  $\mathbb{X}_* \rightarrow \pi_0(\mathcal{P})$  se factorise par un quotient  $\Gamma$  de  $\mathbb{X}_*$  tel que  $\kappa$  soit en dehors du sous-groupe  $\Gamma^*$  de  $\hat{\mathbb{T}}$ . Il s'ensuit que la restriction de  ${}^p\text{H}^n(\tilde{f}_*^{\text{ani}}\overline{\mathbb{Q}}_\ell)_\kappa$  à  $U$  est nulle.  $\square$

**6.3. L'immersion fermée de  $\tilde{\mathcal{A}}_H$  dans  $\tilde{\mathcal{A}}$ .** — Soit  $(\kappa, \rho_\kappa)$  une donnée endoscopique de  $G$  sur  $\overline{X}$  cf. 1.8.1. On lui a associé un groupe endoscopique  $H$  sur  $\overline{X}$ . On a construit un morphisme

$$\nu : \mathcal{A}_H \rightarrow \tilde{\mathcal{A}}$$

entre les bases des fibrations de Hitchin pour  $H$  et pour  $G$  cf. 4.15.

Soit  $(\kappa, \rho_\kappa^\bullet)$  une donnée endoscopique pointée de  $G$  sur  $\overline{X}$  cf. 1.8.2. On a alors un  $\pi_0(\kappa)$ -torseur  $\rho_\kappa : \overline{X}_{\rho_\kappa} \rightarrow \overline{X}$  avec un point  $\infty_{\rho_\kappa}$  au-dessus de  $\infty$ . On en déduit un point  $\infty_G$  du  $\text{Out}(G)$ -torseur  $\rho_G$  et un point  $\infty_H$  du  $\text{Out}(H)$ -torseur  $\rho_H$ .

**6.3.1.** — Avec la donnée endoscopique pointée, on peut définir un morphisme canonique

$$\tilde{\nu} : \tilde{\mathcal{A}}_H \rightarrow \tilde{\mathcal{A}}$$

de la façon suivante. Soit  $a_H \in \mathcal{A}_H^\infty(\bar{k})$  d'image  $a \in \mathcal{A}^\infty(\bar{k})$ . Rappelons que les courbes camérales  $\tilde{X}_{a_H}$  et  $\tilde{X}_a$  ne sont pas directement reliées mais on a un morphisme entre leurs revêtements étales

$$\tilde{X}_{\rho_\kappa, a_H} \rightarrow \tilde{X}_{\rho_\kappa, a}.$$

En effet, on a le diagramme suivant

(6.3.2)

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \tilde{X}_{\rho_\kappa, a} & & \\
 & \nearrow & \downarrow & \searrow & \\
 \tilde{X}_{\rho_\kappa, a_H} & \xrightarrow{\quad} & X_{\rho_\kappa} \times \mathbb{t}_D & \xrightarrow{\quad} & \mathfrak{c}_{H,D} \\
 & \searrow & \downarrow & \swarrow & \\
 & & \overline{X} & \xrightarrow{a_H} & \mathfrak{c}_{H,D} \\
 & & \downarrow a & & \downarrow \nu \\
 & & \mathfrak{c}_D & & 
 \end{array}$$

avec deux parallélogrammes cartésiens. Il s'ensuit que le morphisme  $\nu$  détermine le morphisme en pointillé qu'on voulait construire.

Un  $\bar{k}$ -point  $\tilde{a}_H = (a_H, \tilde{\infty})$  de  $\tilde{\mathcal{A}}_H$  consiste en un point  $a_H \in \mathcal{A}_H^\infty(\bar{k})$  plus un point  $\tilde{\infty}$  dans  $\tilde{X}_{a_H}$  au-dessus de  $\infty$ . La donnée du point  $\infty_{\rho_\kappa}$  de  $\rho_\kappa$  détermine alors un point  $\tilde{\infty}_{\rho_\kappa} = (\tilde{\infty}, \infty_{\rho_\kappa})$  de  $\tilde{X}_{\rho_\kappa, a_H}$ . Il revient au même se donner un point de  $\tilde{\mathcal{A}}_H$  que de se donner un couple  $(a_H, \tilde{\infty}_{\rho_\kappa})$  avec  $a_H \in \mathcal{A}_H^\infty(\bar{k})$  et  $\tilde{\infty}_{\rho_\kappa} \in \tilde{X}_{\rho_\kappa, a_H}(\bar{k})$  au-dessus de  $\infty$ . Avec cette nouvelle

description, en utilisant le morphisme  $\tilde{X}_{\rho_\kappa, a_H} \rightarrow \tilde{X}_{\rho_\kappa, a}$  construit ci-dessus, on obtient le morphisme

$$\tilde{\nu} : \tilde{\mathcal{A}}_H \rightarrow \tilde{\mathcal{A}}$$

qu'on voulait.

**Remarque 6.3.3.** — Si le point  $\infty_{\rho_\kappa}$  est défini sur  $k$ , le morphisme  $\tilde{\nu} : \tilde{\mathcal{A}}_H \rightarrow \tilde{\mathcal{A}}$  ci-dessus est aussi défini sur  $k$ .

**Proposition 6.3.4.** — *Le morphisme  $\tilde{\nu} : \tilde{\mathcal{A}}_H \rightarrow \tilde{\mathcal{A}} \otimes_k \bar{k}$  est une immersion fermée.*

*Démonstration.* — On sait par [55, 10.3] que c'est un morphisme fini non ramifié. Il suffit maintenant de vérifier qu'il induit une injection sur les points géométriques. Voici un énoncé plus précis.  $\square$

**Proposition 6.3.5.** — *Un point  $\tilde{a} \in \tilde{\mathcal{A}}(\bar{k})$  peut être décrit comme un couple  $(a, \tilde{\infty}_{\rho_\kappa})$  avec  $a \in \mathcal{A}^\infty(\bar{k})$  et  $\infty_{\rho_\kappa}$  dans  $\tilde{X}_{\rho_\kappa, a}$  au-dessus de  $\infty_{\rho_\kappa}$ . Soit  $U$  l'ouvert de  $\tilde{X}$  défini par  $U = a^{-1}(\mathfrak{c}_D^{\text{rs}})$ . Le point  $\tilde{\infty}_{\rho_\kappa}$  de  $\tilde{X}_{\rho_\kappa, a}$  définit un homomorphisme*

$$\pi_{\rho_\kappa, a}^\bullet : \pi_1(U, \infty) \rightarrow \mathbb{W} \rtimes \pi_0(\kappa).$$

*Le point  $\tilde{a}$  provient d'un point  $\tilde{a}_H \in \tilde{\mathcal{A}}_H(\bar{k})$  si et seulement si l'image de  $\pi_{\rho_\kappa, a}^\bullet$  est contenue dans le sous-groupe  $\mathbb{W}_{\mathbb{H}} \rtimes \pi_0(\kappa)$  de  $\mathbb{W} \rtimes \pi_0(\kappa)$  défini par le lemme 1.9.1.*

*Démonstration.* — Les points  $a_H \in \mathcal{A}_H(\bar{k})$  au-dessus de  $a$  correspondent bijectivement aux composantes irréductibles de l'image inverse de la section  $a(\tilde{X}) \subset \mathfrak{c}_D$  par le morphisme fini plat  $\nu : \mathfrak{c}_{H,D} \rightarrow \mathfrak{c}_D$  dont la projection sur  $\tilde{X}$  est un isomorphisme. Cette image inverse  $\nu^{-1}(a(\tilde{X}))$  est par ailleurs le quotient au sens des invariants de  $\tilde{X}_{\rho_\kappa, a}$  par le sous-groupe  $\mathbb{W}_H \rtimes \pi_0(\kappa)$  de  $\mathbb{W} \rtimes \pi_0(\kappa)$  défini par le lemme 1.9.1. Le point  $(a, \tilde{\infty}_{\rho_\kappa})$  provient d'un point  $(a_H, \tilde{\infty}_{\rho_\kappa}) \in \tilde{\mathcal{A}}_H(\bar{k})$  si et seulement si la projection sur  $\tilde{X}$  de la composante irréductible passant par l'image de  $\tilde{\infty}_{\rho_\kappa}$  dans le quotient au sens des invariants

$$\nu^{-1}(a(\tilde{X})) = \tilde{X}_{\rho_\kappa, a} / (\mathbb{W}_H \rtimes \pi_0(\kappa))$$

est un isomorphisme. Puisque ces composantes irréductibles sont finies et plates au-dessus de  $\tilde{X}$ , il suffit de vérifier ce critère au-dessus de l'ouvert  $\bar{U}$  où les projections sur  $\tilde{X}$  envisagées sont finies et étales. On en déduit le critère galoisien dans l'énoncé du lemme.  $\square$

Nous allons maintenant décrire le fermé  $\tilde{\mathcal{A}}_\kappa$  comme une réunion disjointes des fermés  $\tilde{\mathcal{A}}_H$  pour de différentes données endoscopiques pointées. Il faut pour cela choisir une réduction du tore  $\rho_G$  bonne pour tous les groupes endoscopiques envisagés.

Soit  $\bar{\rho}_G$  la restriction de  $\rho_G$  à  $\bar{X}$ . Fixons un  $\bar{k}$ -point  $\infty_G$  de  $\rho_G$  au-dessus de  $\infty$ . Ce point définit un homomorphisme  $\rho_G^\bullet : \pi_1(\bar{X}, \infty) \rightarrow \text{Out}(\mathbb{G})$ . Nous allons fixer un élément  $\kappa \in \hat{\mathbb{T}}$ . Rappelons qu'une donnée endoscopique pointée 1.8.2 avec ce  $\kappa$  fixe, est un homomorphisme

$$\rho_\kappa^\bullet : \pi_1(\bar{X}, \infty) \rightarrow \pi_0(\kappa)$$

au-dessus de  $\rho_G^\bullet$ .

**Lemme 6.3.6.** — *Il existe un quotient fini  $\rho^\bullet : \pi_1(\bar{X}, \infty) \rightarrow \Theta_\rho$  tel que  $\rho_G^\bullet$  se factorise par  $\rho^\bullet$  ainsi que toutes les données endoscopiques pointées  $\rho_\kappa^\bullet$ .*

*Démonstration.* — Puisque le noyau de  $\pi_0(\kappa) \rightarrow \text{Out}(\mathbb{G})$  est un groupe fini, il n'y a qu'un nombre fini d'homomorphismes  $\pi_1(\bar{X}, \infty) \rightarrow \pi_0(\kappa)$  au-dessus de  $\rho_G^\bullet$ .  $\square$

**Proposition 6.3.7.** — *Le fermé  $\tilde{\mathcal{A}}_\kappa$  de 6.2.3 est la réunion disjointe indexée par l'ensemble des données endoscopiques pointées  $(\kappa, \rho_\kappa^\bullet)$  des fermés  $\tilde{\mathcal{A}}_H$  pour les groupes endoscopiques  $H$  associés à  $(\kappa, \rho_\kappa^\bullet)$ .*

*Démonstration.* — Comme dans le lemme précédent, fixons donc une factorisation de  $\rho_G^\bullet$  un quotient fini  $\rho^\bullet : \pi_1(\bar{X}, \infty) \rightarrow \Theta_\rho$  suivi d'un homomorphisme  $\mathbf{o}_\mathbb{G} : \Theta_\rho \rightarrow \text{Out}(\mathbb{G})$  comme ci-dessus. Puisque  $\rho^\bullet$  est surjectif, une donnée endoscopique pointée  $(\kappa, \rho_\kappa^\bullet)$  sur  $\bar{X}$  est alors équivalente à un homomorphisme  $\mathbf{o} : \Theta_\rho \rightarrow \pi_0(\kappa)$  au-dessus de  $\mathbf{o}_\mathbb{G}$ . La donnée de  $\rho^\bullet$  détermine un revêtement fini étale  $\rho : \bar{X}_\rho \rightarrow \bar{X}$  de groupe de Galois  $\Theta_\rho$  muni d'un point  $\infty_\rho$  au-dessus de  $\infty$ .

Soit  $\mathbf{o} : \Theta_\rho \rightarrow \pi_0(\kappa)$  un homomorphisme au-dessus de  $\mathbf{o}_\mathbb{G} : \Theta_\rho \rightarrow \text{Out}(\mathbb{G})$ . Soit  $H$  le groupe endoscopique associé. Soit  $\tilde{a} = (a, \tilde{\infty}_\rho) \in \mathcal{A}(\bar{k})$  un point dans le fermé  $\mathcal{A}_H$  comme dans 6.3.5. Montrer qu'il est dans  $\tilde{\mathcal{A}}_\kappa$  revient à montrer que le groupe de monodromie  $W_{\tilde{a}}$  est contenu dans  $(\mathbb{W} \rtimes \Theta_\rho)_\kappa$  et son sous-groupe normal  $I_{\tilde{a}}$  est contenu dans  $\mathbb{W}_\mathbb{H}$ .

D'après la proposition 6.3.5, le groupe de monodromie  $W_{\tilde{a}}$  est contenu dans le sous-groupe  $\mathbb{W}_\mathbb{H} \rtimes \Theta_\rho$  de  $\mathbb{W} \rtimes \Theta_\rho$ . Ce sous-groupe fixe  $\kappa$  de sorte qu'on a  $W_{\tilde{a}} \subset (\mathbb{W} \rtimes \Theta_\rho)_\kappa$ . Puisqu'on a un morphisme  $\tilde{X}_{\rho, a} \rightarrow \bar{X}_\rho$  qui est  $\mathbb{W} \rtimes \Theta_\rho$ -équivariant avec  $\Theta_\rho$  agissant sans points fixes sur  $\bar{X}_\rho$ , le groupe

$I_{\tilde{a}}$  est nécessairement contenu dans le noyau de  $\mathbb{W} \rtimes \Theta_\rho \rightarrow \Theta_\rho$  donc  $I_{\tilde{a}} \subset \mathbb{W}$ . On a alors

$$I_{\tilde{a}} \subset \mathbb{W} \cap (\mathbb{W}_{\mathbb{H}} \rtimes \Theta_\rho) = \mathbb{W}_{\mathbb{H}}$$

de sorte que  $\tilde{a}$  est bien un point de  $\tilde{\mathcal{A}}_\kappa$ .

Soit maintenant  $\tilde{a} = (a, \tilde{\omega}_\rho) \in \tilde{\mathcal{A}}_\kappa$ . Montrons d'abord qu'il détermine un unique homomorphisme  $\mathbf{o} : \Theta_\rho \rightarrow \pi_0(\kappa)$ .

Soit  $C_{\tilde{a}}$  la composante de  $\tilde{X}_{\rho, a}^b$  contenant  $\tilde{\omega}_\rho$ . Rappelons qu'on a noté  $W_{\tilde{a}}$  le sous-groupe de  $\mathbb{W} \rtimes \Theta_\rho$  des éléments qui laissent stable la composante  $C_{\tilde{a}}$  et  $I_{\tilde{a}}$  est le sous-groupe normal de  $W_{\tilde{a}}$  engendré par des éléments ayant au moins un point fixe dans  $C_{\tilde{a}}$ . On sait que  $I_{\tilde{a}} \subset \mathbb{W}$ . Le quotient au sens des invariants  $D_{\tilde{a}} = C_{\tilde{a}}/I_{\tilde{a}}$  est alors un revêtement fini étale galoisien de  $\tilde{X}$  de groupe de Galois  $W_{\tilde{a}}/I_{\tilde{a}}$ . L'image du point  $\tilde{\omega}_\rho$  dans le revêtement fini étale  $D_{\tilde{a}}$  définit un homomorphisme  $\varrho_{\tilde{a}}^\bullet : \pi_1(\tilde{X}, \infty) \rightarrow W_{\tilde{a}}/I_{\tilde{a}}$ . Comme l'image de  $\tilde{\omega}_\rho$  dans le revêtement fini étale galoisien  $\tilde{X}_\rho$  est le point  $\omega_\rho$  fixé, on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(\tilde{X}, \infty) & \xrightarrow{\varrho_{\tilde{a}}^\bullet} & W_{\tilde{a}}/I_{\tilde{a}} \\ & \searrow \rho^\bullet & \downarrow \\ & & \Theta_\rho \end{array}$$

où la flèche verticale se déduit de l'inclusion  $W_{\tilde{a}} \subset \mathbb{W} \rtimes \Theta_\rho$  et  $I_{\tilde{a}} \subset \mathbb{W}$ . En particulier, la flèche verticale est nécessairement surjective car  $\rho^\bullet$  l'est.

Puisque que  $\tilde{a} \in \tilde{\mathcal{A}}_\kappa(k)$ , on a  $I_{\tilde{a}} \subset \mathbb{W}_{\mathbb{H}}$  et  $W_{\tilde{a}} \subset (\mathbb{W} \rtimes \Theta_\rho)_\kappa$ . On en déduit un homomorphisme  $W_{\tilde{a}}$  dans  $(\mathbb{W} \rtimes \text{Out}(\mathbb{G}))_\kappa$  qui envoie  $I_{\tilde{a}}$  dans  $\mathbb{W}_{\mathbb{H}}$ . Il en résulte un homomorphisme

$$\mathbf{o}_{\tilde{a}} : W_{\tilde{a}}/I_{\tilde{a}} \rightarrow (\mathbb{W} \rtimes \text{Out}(\mathbb{G}))_\kappa / \mathbb{W}_{\mathbb{H}} = \pi_0(\kappa).$$

Puisqu'on a choisi le quotient  $\Theta_\rho$  suffisamment grand, il existe un unique homomorphisme  $\mathbf{o} : \Theta_\rho \rightarrow \pi_0(\kappa)$  tel que le diagramme suivant est commutatif

$$(6.3.8) \quad \begin{array}{ccccc} \pi_1(X, \infty) & \xrightarrow{\varrho_{\tilde{a}}^\bullet} & W_{\tilde{a}}/I_{\tilde{a}} & & \\ & \searrow \rho^\bullet & \downarrow & \searrow \mathbf{o}_{\tilde{a}} & \\ & & \Theta_\rho & \xrightarrow{\mathbf{o}} & \pi_0(\kappa) \end{array}$$

Ainsi un point  $\tilde{a} \in \tilde{\mathcal{A}}_\kappa(k)$  détermine une donnée endoscopique pointée associée à  $(\kappa, \mathbf{o})$ .

Montrons maintenant  $\tilde{a} \in \tilde{\mathcal{A}}_H$  où  $H$  est le groupe endoscopique associé à  $(\kappa, \mathbf{o})$ . Le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & W_{\tilde{a}} \cap \mathbb{W} & \longrightarrow & W_{\tilde{a}} & \longrightarrow & \Theta_{\rho} \longrightarrow 1 \\ & & & & \downarrow & & \downarrow \mathbf{o} \\ 1 & \longrightarrow & \mathbb{W}_{\mathbb{H}} & \longrightarrow & (\mathbb{W} \rtimes \text{Out}(\mathbb{G}))_{\kappa} & \longrightarrow & \pi_0(\kappa) \longrightarrow 1 \end{array}$$

implique immédiatement  $W_{\tilde{a}} \cap \mathbb{W} \subset \mathbb{W}_{\mathbb{H}}$ . On connaît de plus un scindage canonique de la suite du bas

$$\theta : \pi_0(\kappa) \rightarrow (\mathbb{W} \rtimes \text{Out}(\mathbb{G}))_{\kappa}$$

de sorte qu'on a un homomorphisme

$$W_{\tilde{a}} \rightarrow \mathbb{W}_{\mathbb{H}} \rtimes \Theta_{\rho}$$

où le produit semi-direct est formé à l'aide de  $\mathbf{o}$  et de l'homomorphisme  $\theta$  dans la démonstration du lemme 1.9.1. En composant avec l'inclusion  $\mathbb{W}_{\mathbb{H}} \rtimes \Theta_{\rho} \rightarrow \mathbb{W} \rtimes \Theta_{\rho}$ , on obtient un homomorphisme

$$W_{\tilde{a}} \rightarrow \mathbb{W} \rtimes \Theta_{\rho}.$$

Comparons cet homomorphisme avec l'inclusion naturelle de  $W_{\tilde{a}} \subset \mathbb{W} \rtimes \Theta_{\rho}$ . Les deux induisent le même homomorphisme sur le sous-groupe  $W_{\tilde{a}} \cap \mathbb{W} \subset \mathbb{W}_{\mathbb{H}}$  et induisent l'identité au niveau du quotient  $\Theta_{\rho}$ . Il s'ensuit que les deux homomorphismes à comparer sont les mêmes. Par conséquent, on a

$$W_{\tilde{a}} \subset \mathbb{W}_{\mathbb{H}} \rtimes \Theta_{\rho}$$

ce qui implique que  $\tilde{a} \in \mathcal{A}_H$ .

Enfin le diagramme commutatif 6.3.8 montre que  $\mathbf{o}$  est complètement déterminé par  $\mathbf{o}_{\tilde{a}}$ . Ceci implique que les fermés  $\tilde{\mathcal{A}}_H$  et  $\tilde{\mathcal{A}}_{H'}$  pour les groupes endoscopiques  $H$  et  $H'$  associés à  $(\kappa, \rho_{\kappa}^{\bullet})$  et  $(\kappa, \rho'_{\kappa})$  différents, sont des fermés disjoints de  $\tilde{\mathcal{A}} \otimes_k \bar{k}$ .  $\square$

**6.4. Stabilisation géométrique : formulation sur  $\tilde{\mathcal{A}}^{\text{ani}}$ .** — Supposons maintenant qu'on a une donnée endoscopique pointée  $(\kappa, \rho_{\kappa}^{\bullet})$  défini sur  $X$ . Soit  $H$  le groupe endoscopique associé. Considérons la fibration de Hitchin  $f_H : \mathcal{M}_H \rightarrow \mathcal{A}_H$  pour le groupe  $H$ . Considérons le revêtement étale  $\tilde{\mathcal{A}}_H$  de  $\mathcal{A}_H$ . Le morphisme

$$\tilde{\nu} : \tilde{\mathcal{A}}_H \rightarrow \tilde{\mathcal{A}}_G$$

est alors une immersion fermée car il en est ainsi après le changement de base de  $k$  à  $\bar{k}$  cf. 6.3.4.

**6.4.1.** — Considérons l'image réciproque de  ${}^p\mathrm{H}^*(f_*^{\mathrm{ani}}\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$  à  $\tilde{\mathcal{A}}^{\mathrm{ani}}$ . Au-dessus de  $\tilde{\mathcal{A}}$ , on a un homomorphisme surjectif  $\mathbb{X}_* \rightarrow \pi_0(\mathcal{P})|_{\tilde{\mathcal{A}}}$  cf. 5.7.1 de sorte qu'on a une action de  $\mathbb{X}_*$  sur  ${}^p\mathrm{H}^*(f_*^{\mathrm{ani}}\overline{\mathbb{Q}}_\ell)|_{\tilde{\mathcal{A}}}$  qui se factorise par un quotient fini au-dessus de l'ouvert  $\tilde{\mathcal{A}}^\infty$ . Considérons le facteur direct

$${}^p\mathrm{H}^*(\tilde{f}_*^{\mathrm{ani}}\overline{\mathbb{Q}}_\ell)_\kappa$$

où  $\mathbb{X}_*$  agit par le caractère  $\kappa : \mathbb{X}_* \rightarrow \overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times$ . D'après le lemme 6.2.3, le support de ce facteur direct est contenu dans  $\tilde{\mathcal{A}}_\kappa$  qui est la réunion disjointe des images des immersions fermées  $\tilde{\mathcal{A}}_{H'} \rightarrow \tilde{\mathcal{A}}$  sur l'ensemble des données endoscopiques pointées  $(\rho_\kappa^\bullet)' : \pi_1(\overline{X}, \infty) \rightarrow \pi_0(\kappa)$  et où  $H'$  est le groupe endoscopique associé. Ainsi  ${}^p\mathrm{H}^*(\tilde{f}_*^{\mathrm{ani}}\overline{\mathbb{Q}}_\ell)_\kappa$  se décompose en une somme directe de termes  ${}^p\mathrm{H}^*(\tilde{f}_*^{\mathrm{ani}}\overline{\mathbb{Q}}_\ell)_\kappa|_{\mathcal{A}_{H'}}$  supportés par  $\mathcal{A}_{H'}$ . Le facteur direct  ${}^p\mathrm{H}^*(\tilde{f}_*^{\mathrm{ani}}\overline{\mathbb{Q}}_\ell)_\kappa|_{\mathcal{A}_H}$  est défini sur  $k$ .

**6.4.2.** — Considérons la fibration de Hitchin  $f_H : \mathcal{M}_H \rightarrow \mathcal{A}_H$  pour le groupe  $H$ . En prenant la partie  $\kappa = 1$  dans les faisceaux pervers de cohomologie restreints à  $\tilde{\mathcal{A}}_H$ , on obtient ainsi un faisceau pervers gradué

$${}^p\mathrm{H}^*(\tilde{f}_{H,*}^{\mathrm{ani}}\overline{\mathbb{Q}}_\ell)_{\mathrm{st}}.$$

Son image directe par  $\tilde{\nu}_*$  définit un faisceau pervers gradué sur  $\tilde{\mathcal{A}}$ .

**Théorème 6.4.3.** — *Il existe un isomorphisme entre les semi-simplifications des faisceaux pervers gradués*

$$\tilde{\nu}^* \bigoplus_n {}^p\mathrm{H}^n(\tilde{f}_*^{\mathrm{ani}}\overline{\mathbb{Q}}_\ell)_\kappa [2r_H^G(D)](r_H^G(D)) \simeq \bigoplus_n {}^p\mathrm{H}^n(\tilde{f}_{H,*}^{\mathrm{ani}}\overline{\mathbb{Q}}_\ell)_{\mathrm{st}}$$

où

$$r_H^G(D) = (\sharp \Phi - \sharp \Phi_{\mathbb{H}}) \deg(D)/2$$

est la codimension de  $\tilde{\mathcal{A}}_H$  dans  $\tilde{\mathcal{A}}$ .

Notons que comme il s'agit des faisceaux pervers purs, au-dessus de  $\tilde{\mathcal{A}}^{\mathrm{ani}} \otimes_k \bar{k}$ , ils sont semi-simples d'après les théorème de décomposition. Il s'en suit que les faisceaux pervers gradués ci-dessus sont isomorphes au-dessus de  $\tilde{\mathcal{A}}^{\mathrm{ani}} \otimes_k \bar{k}$ .

La démonstration de ce théorème occupera la grande partie du reste de l'article. On en déduira la conjecture de Langlands-Shelstad 1.11.1 en cours de sa démonstration.



**6.5. Le complément de  $\mathcal{A}^{\text{ani}}$  dans  $\mathcal{A}$ .** — Pour terminer ce chapitre, notons que le complément de  $\mathcal{A}^{\text{ani}}$  dans  $\mathcal{A}^\heartsuit$  est un sous-schéma fermé de grande codimension.

**Proposition 6.5.1.** — *La codimension de  $\mathcal{A}^\heartsuit - \mathcal{A}^{\text{ani}}$  dans  $\mathcal{A}^\heartsuit$  est plus grande ou égale à  $\deg(D)$ .*

*Démonstration.* — Le même argument que dans le lemme 6.3.5 montre que le complément  $\mathcal{A}^\heartsuit - \mathcal{A}^{\text{ani}}$  est contenu dans la réunion des images de

$$\mathcal{A}_M \rightarrow \mathcal{A}$$

pour les sous-groupes de Levi de  $G$  contenant le tore maximal  $T$ . D’après la formule 4.4.1, on a

$$\dim(\mathcal{A}) - \dim(\mathcal{A}_M) = (\#\Phi - \#\Phi_M) \deg(D)/2 \geq \deg(D)$$

d’où la proposition. □

## 7. Théorème du support

Dans ce chapitre, nous démontrons un théorème du support qui est l’énoncé technique central de l’article. Dans le premier paragraphe, nous donnons l’énoncé *cf.* 7.1.13 de ce théorème du support et discutons de ses variantes utiles. Les hypothèses du théorème sont bien entendues modelées sur la fibration de Hitchin mais restent suffisamment raisonnables pour qu’on puisse espérer l’appliquer à d’autres situations.

La démonstration de 7.1.13 occupe les quatres paragraphes suivants. La notion clé d’amplitude d’un support est introduite dans 7.2. Nous y énonçons une estimation de cette amplitude. En admettant cette estimation, nous démontrons 7.1.13 dans 7.3 en suivant l’argument de Goresky et MacPherson rappelé dans l’appendice A. La démonstration de l’estimation d’amplitude est fondée sur une notion de liberté de l’homologie d’un schéma vu comme un module sur l’homologie de la partie abélienne du groupe agissant. Cette propriété est bien connue dans une situation absolue. Dans une situation relative, il est assez difficile de dégager cet énoncé de liberté et a fortiori de le démontrer. C’est le contenu du long paragraphe 7.4. Dans le paragraphe suivant, nous expliquons comment cette propriété de liberté implique l’estimation d’amplitude désirée.

Dans le dernier paragraphe, nous appliquons le théorème du support à la partie anisotrope de la fibration de Hitchin.

**7.1. L'énoncé du théorème du support.** — Soient  $S$  et  $M$  deux  $k$ -schémas de type fini lisses et  $f : M \rightarrow S$  un morphisme propre, plat et à fibres géométriques réduites. D'après le théorème de pureté de Deligne, le complexe  $f_*\overline{\mathbb{Q}}_\ell$  est pur. En appliquant le théorème de décomposition [6], on sait que  $f_*\overline{\mathbb{Q}}_\ell$  est isomorphe à la somme directe de ses faisceaux pervers de cohomologie avec des décalages évidents

$$f_*\overline{\mathbb{Q}}_\ell \simeq \bigoplus_n^p H^n(f_*\overline{\mathbb{Q}}_\ell)[-n].$$

De plus, les faisceaux pervers  $K^n = {}^pH^n(f_*\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$  sont géométriquement semi-simples. D'après [6], pour tout faisceau pervers géométriquement simple  $K$  sur  $S \otimes_k \bar{k}$ , il existe un sous-schéma fermé réduit irréductible  $i : Z \hookrightarrow S \otimes_k \bar{k}$ , un ouvert dense  $U \hookrightarrow Z$  et un système local irréductible  $L$  sur  $U$  tel que

$$K = i_*j_{!*}L[\dim(Z)].$$

Le sous-schéma fermé  $Z$  est complètement déterminé par  $K$  et sera appelé le *support* de  $K$ . En général, le problème de déterminer les supports des faisceaux pervers simples présents dans la décomposition de  $f_*\overline{\mathbb{Q}}_\ell$  est un problème très difficile. On peut cependant le résoudre dans le cas où  $M$  est munie d'une grosse action d'un schéma en groupes lisse commutatif moyennant quelques hypothèses que nous allons énumérer.

**7.1.1.** — La réponse au problème de déterminer les supports sera donnée en termes du faisceau  $\text{Irr}(M/S)$  des composantes irréductibles des fibres de  $f$ . Ce faisceau existe sous l'hypothèse  $f$  plat à fibres géométriques réduites. En effet, notons  $U$  l'ouvert de  $M$  où  $f$  est un morphisme lisse. Cet ouvert est alors dense dans chaque fibre géométrique de  $f$ . En effet, comme un morphisme plat de fibres géométriques lisses est lisse [27, 19.7.1], l'intersection de  $U$  avec une fibre géométrique  $M_s$  est exactement la partie lisse de  $M_s$  qui est dense dans  $M_s$  car celle-ci est géométriquement réduite. Pour tout point géométrique  $s$  de  $S$ , l'ensemble des composantes connexes de  $U_s$  s'identifie donc canoniquement à l'ensemble des composantes irréductibles de  $M_s$ . Il suffit donc de construire le faisceau  $\pi_0(U/S)$  des composantes connexes des fibres de  $U/S$ .

Rappelons cette construction dont le lecteur peut se référer à la proposition 6.2 de [55] pour plus de détails. Pour toute section locale  $u$  de  $U$  au-dessus d'un ouvert étale  $S'$  de  $S$ , d'après un théorème de Grothendieck [27, 15.6.4], il existe un unique ouvert de Zariski  $M_u$  de  $U' = U \times_S S'$  tel

que pour tout  $s \in S'$ , la fibre  $U_{u,s}$  est la composante connexe de  $U_s$  contenant le point  $u(s)$ . Deux sections locales  $u$  et  $u'$  sont dites équivalentes si les ouverts correspondants  $U_u$  et  $U_{u'}$  sont égaux. Le faisceau des sections locales de  $U/S$  modulo cette relation d'équivalence définit un faisceau constructible  $\pi_0(U/S)$ . Ce faisceau vérifie en plus la propriété que pour tout point géométrique  $s$  de  $S$ , la fibre de  $\pi_0(U/S)$  en  $s$  est l'ensemble des composantes connexes de  $U_s$ .

**7.1.2.** — Soit  $P$  un  $S$ -schéma en groupes commutatifs lisse à fibres connexes. Supposons qu'on a une action de  $P$  sur  $M$

$$\text{act} : P \times_S M \rightarrow M.$$

Pour tout point géométrique  $s$  de  $S$ , la fibre  $P_s$  admet un dévissage canonique de Chevalley

$$1 \rightarrow R_s \rightarrow P_s \rightarrow A_s \rightarrow 1$$

où  $A_s$  est une variété abélienne et où  $R_s$  est un groupes algébrique affine commutatif connexe. Nous dirons que  $P$  agit  $M$  avec stabilisateurs affines si pour tout point géométrique  $m \in M$  au-dessus de  $s \in S$ , le stabilisateur de  $m$  dans  $P_s$  est un sous-groupe affine. Autrement dit, la composante neutre du stabilisateur de  $m$  dans  $P_s$  est contenue dans le sous-groupe affine connexe maximal  $R_s$  de  $P_s$ .

**7.1.3.** — Pour tout point géométrique  $s \in S$ , notons  $\delta_s = \dim(R_s)$  la dimension de la partie affine de  $P_s$ . Si  $s \in S$  un point quelconque, le dévissage de Chevalley de  $P_s$  existe et est unique après un changement de base radiciel de sorte que l'entier  $\delta_s$  est aussi bien défini. La fonction  $\delta$  défini sur l'espace topologique sous-jacent à  $S$  à valeurs dans les entiers naturels est semi-continue *cf.* [29]. Il existe donc une stratification de  $S$  en des sous-schémas localement fermés  $S_\delta$  tels que pour tout point géométrique  $s \in S_\delta$ , on a  $\delta_s = \delta$ .

On dira que le  $S$ -schéma en groupes commutatif lisse  $P$  est  $\delta$ -régulier si pour tout  $\delta \in \mathbb{N}$ , on a

$$\text{codim}_S(S_\delta) \geq \delta.$$

Cette hypothèse implique en particulier que  $\text{codim}(S_1) \geq 1$  de sorte que  $S_0 \neq \emptyset$ . Il en résulte que  $P$  est génériquement un schéma abélien.

Soit  $Z$  un sous-schéma fermé irréductible de  $S$ . Soit  $\delta_Z$  la valeur minimale que prend la fonction  $\delta$  sur  $Z$  qui est atteinte sur un ouvert dense

de  $Z$  qui est alors nécessairement contenu dans l'adhérence de la strate  $S_{\delta_Z}$ . Si  $P$  est  $\delta$ -régulier, alors  $\text{codim}(S_{\delta_Z}) \geq \delta_Z$  et a fortiori

$$\text{codim}(Z) \geq \delta_Z.$$

Il est clair que  $P$  est  $\delta$ -régulier si et seulement si pour tout sous-schéma fermé irréductible  $Z$  de  $S$ , on a  $\text{codim}(Z) \geq \delta_Z$ .

**7.1.4.** — Considérons le faisceau des modules de Tate

$$T_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(P) = H^{2d-1}(g_! \overline{\mathbb{Q}}_\ell)(d)$$

dont la fibre au-dessus de chaque point géométrique  $s$  de  $S$  est le  $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -module de Tate  $T_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(P_s)$  de la fibre en  $s$  de  $P^0$ . Pour tout point géométrique  $s$  de  $S$ , le dévissage canonique de Chevalley de  $P_s$  induit un dévissage de son module de Tate

$$0 \rightarrow T_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(R_s) \rightarrow T_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(P_s) \rightarrow T_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(A_s) \rightarrow 0.$$

On a

$$\dim(T_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(A_s)) = 2 \dim(A_s) = 2(d - \delta_s)$$

alors que la dimension de  $T_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(R_s)$  est égale à la dimension de la partie torique de  $R_s$ .

On dira que  $T_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(P)$  est *polarisable* si localement pour la topologie étale de  $S$ , il existe une forme bilinéaire alternée

$$T_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(P) \otimes T_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(P) \rightarrow \overline{\mathbb{Q}}_\ell(1)$$

dont la fibre en chaque point géométrique  $s$  a comme noyau  $T_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(R_s)$  c'est-à-dire qu'elle s'annule sur  $T_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(R_s)$  et induit un accouplement parfait sur  $T_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(A_s)$ .

**Théorème 7.1.5.** — Soient  $M$  et  $S$  des  $k$ -schémas lisses et  $f : M \rightarrow S$  un morphisme propre plat de fibres géométriques réduites de dimension  $d$ . Soit  $P$  un  $S$ -schéma en groupes commutatifs lisse de fibre connexe de dimension  $d$  qui agit sur  $M$  avec stabilisateurs affines. Supposons que le module de Tate  $T_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(P)$  est polarisable.

Considérons une stratification

$$S \otimes_k \bar{k} = \bigsqcup_{\sigma \in \Sigma} S_\sigma$$

telle que pour tout  $\sigma \in \Sigma$ ,  $S_\sigma$  est irréductible et telle que la restriction du faisceau  $\text{Irr}(M/S)$  à chaque strate  $S_\sigma$  est localement constante.

Soit  $K$  un faisceau pervers géométriquement simple présent dans  $f_*\overline{\mathbb{Q}}_\ell$  dont le support est un sous-schéma fermé irréductible  $Z$  de  $S \otimes_k \bar{k}$ . Supposons que  $\delta_Z \geq \text{codim}(Z)$ . Alors  $Z$  est l'adhérence de l'une des strates  $S_\sigma$ .

Compte tenu de la définition de  $\delta$ -régularité, on a un corollaire évident.

**Corollaire 7.1.6.** — *En plus des hypothèses du théorème, supposons que  $P$  est  $\delta$ -régulier. Alors les supports des faisceaux pervers géométriquement semi-simples présents dans  $f_*\overline{\mathbb{Q}}_\ell$  sont parmi les adhérences  $\bar{S}_\sigma$  des strates  $S_\sigma$ .*

**7.1.7.** — Avant de travailler avec les faisceaux pervers de cohomologie  $K^n = {}^p H^n(f_*\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ , envisageons la même question de déterminer le support des facteurs du faisceau de cohomologie ordinaire en degré maximal  $H^{2d}(f_*\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ . L'énoncé 7.1.5 avec le faisceau ordinaire  $H^{2d}(f_*\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$  à la place des faisceaux pervers  $K^n$ , est quasiment immédiat car  $H^{2d}(f_*\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$  s'identifie au faisceau  $\ell$ -adique engendré par le faisceau d'ensembles  $\text{Irr}(M/S)$  à l'aide du morphisme trace. L'analogue de 7.1.5 pour le faisceau de cohomologie ordinaire de degré maximal de  $f_*\overline{\mathbb{Q}}_\ell$  résulte de deux lemmes suivants qui sont bien connus.

**Lemme 7.1.8.** — *Soit  $S$  un  $k$ -schéma de type fini. Soit  $f : M \rightarrow S$  un morphisme plat de fibres géométriques réduites de dimension  $d$ . Soit  $\text{Irr}(M/S)$  le faisceau des composantes irréductibles des fibres de  $M/S$  défini dans 7.1.1. Alors, il existe un isomorphisme canonique*

$$\overline{\mathbb{Q}}_\ell^{\text{Irr}(M/S)}(-d) \xrightarrow{\sim} R^{2d}f_!\overline{\mathbb{Q}}_\ell(d)$$

où  $(-d)$  désigne un twist à la Tate.

*Démonstration.* — Comme dans 7.1.1, puisque  $f$  est un morphisme plat à fibres géométriques réduites, il existe un sous-schéma ouvert  $U$  de  $M$  dont la trace sur chaque fibre géométrique de  $f$  est la partie lisse de cette fibre. On a alors  $\pi_0(U/S) = \text{Irr}(M/S)$ . De plus, le morphisme  $M - U \rightarrow S$  est de dimension relative strictement plus petite que  $d$ . Soit  $h : U \rightarrow S$  la restriction de  $f$  à  $U$ . La flèche dans la suite exacte d'excision

$$R^{2d}h_!\overline{\mathbb{Q}}_\ell \longrightarrow R^{2d}f_!\overline{\mathbb{Q}}_\ell$$

est alors un isomorphisme. Il suffit donc de construire un isomorphisme

$$\overline{\mathbb{Q}}_\ell^{\pi_0(U/S)}(-d) \longrightarrow R^{2d}h_!\overline{\mathbb{Q}}_\ell.$$

Soit  $u$  une section locale de  $U$  au-dessus d'un ouvert étale  $S'$  de  $S$ . D'après un théorème de Grothendieck [27, 15.6.4], il existe un ouvert il existe un unique ouvert de Zariski  $U_u$  de  $U' = U \times_S S'$  tel que pour tout  $s \in S$ , la fibre  $U_{u,s}$  est la composante connexe de  $U_s$  contenant le point  $u(s)$ . Notons  $h_u : U_u \rightarrow S'$  la restriction de  $h$  à  $U_u$ . L'inclusion  $U_u \subset U'$  induit une flèche entre faisceaux de cohomologie à support de degré maximal

$$R^{2d}h_{u!}\overline{\mathbb{Q}}_\ell \longrightarrow R^{2d}h_!\overline{\mathbb{Q}}_\ell|_{S'}.$$

Par ailleurs, on a un morphisme trace

$$R^{2d}h_{u!}\overline{\mathbb{Q}}_\ell \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_\ell(-d)$$

qui est un isomorphisme puisque  $U_u/S'$  a les fibres géométriquement connexes. On en déduit un morphisme

$$\overline{\mathbb{Q}}_\ell(-d) \longrightarrow R^{2d}h_!\overline{\mathbb{Q}}_\ell|_{S'}.$$

Il est clair que ce morphisme ne dépend pas de la section locale  $u$  mais seulement de sa classe d'équivalence c'est-à-dire son image dans  $\pi_0(U/S)$ . On en déduit un morphisme canonique

$$\overline{\mathbb{Q}}_\ell^{\pi_0(U/S)}(-d) \longrightarrow R^{2d}h_!\overline{\mathbb{Q}}_\ell.$$

Pour vérifier que c'est un isomorphisme, il suffit de le faire fibre par fibre ce qui est évident.  $\square$

**Lemme 7.1.9.** — Soit  $\mathcal{F}$  un faisceau  $\ell$ -adique sur  $S$ . Soit  $S = \bigsqcup_{\sigma \in \Sigma} S_\sigma$  une stratification de  $S$  de strates irréductibles telle que la restriction de  $\mathcal{F}$  à chaque strate est localement constante. Soient  $i : Z \rightarrow S$  un sous-schéma fermé irréductible de  $S$  et  $L$  un système local sur  $Z$ . Supposons que  $i_*L$  soit un sous-quotient de  $\mathcal{F}$ . Alors  $S$  est l'adhérence de l'une des strates  $S_\sigma$ .

*Démonstration.* — La restriction de  $i_*L$  à chaque strate  $S_\sigma$ , étant un sous-quotient du système local  $\mathcal{F}|_{S_\sigma}$ , est aussi un système local. Par conséquent, pour tout  $\sigma \in \Sigma$ , ou bien  $S_\sigma \subset Z$  ou bien  $S_\sigma \cap Z = \emptyset$ . Puisque  $Z$  est irréductible, il existe un unique  $\sigma \in \Sigma$  tel que  $Z \cap S_\sigma$  est un ouvert dense de  $Z$ . Alors  $S_\sigma$  est un ouvert dense de  $Z$ .  $\square$

**7.1.10.** — Considérons une variante plus compliquée du théorème 7.1.5 où on ne suppose plus les fibres de  $P$  sont connexes. Soit  $P$  un  $S$ -schéma en groupes commutatifs lisse de type fini. Il existe un sous-schéma en groupes ouvert  $P^0$  de  $P$  dont la fibre  $P_s^0$  au-dessus de chaque point  $s$  de  $S$

est la composante neutre de  $P_s$ . En remplaçant  $P$  par  $P^0$ , on peut définir la notion de  $\delta$ -régularité et celle de module de Tate  $T_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(P^0)$  polarisable.

**7.1.11.** — Il existe un faisceau en groupes abéliens finis  $\pi_0(P)$  pour la topologie étale de  $S$  qui interpole les groupes de composantes connexes  $\pi_0(P_s)$  des fibres de  $P$  cf. [55, 6.2].

L'action de  $P$  sur  $M$  induit une action du faisceau en groupes  $\pi_0(P)$  sur le faisceau d'ensembles  $\text{Irr}(M/S)$ . Donnons-nous un homomorphisme

$$\Pi_0 \rightarrow \pi_0(P)$$

où  $\Pi_0$  est le faisceau constant de valeur d'un certain groupe abélien fini  $\Pi_0$ . Localement pour la topologie étale de  $S$ , il existe de tels homomorphismes qui ne sont pas triviaux.

On a alors une action du groupe fini  $\Pi_0$  sur le faisceau d'ensembles  $\text{Irr}(M/S)$ . Considérons le faisceau  $\ell$ -adique  $\overline{\mathbb{Q}}_\ell^{\text{Irr}(M/S)}$  qui associe à tout ouvert étale  $S'$  de  $S$  l'espace vectoriel  $\overline{\mathbb{Q}}_\ell^{\text{Irr}(M/S)(U')}$  et qui lui aussi est muni d'une action du groupe fini  $\Pi_0$ . Pour tout caractère  $\kappa : \Pi_0 \rightarrow \overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times$ , on peut donc définir le facteur direct

$$(\overline{\mathbb{Q}}_\ell^{\text{Irr}(M/S)})_\kappa$$

où  $\Pi_0$  agit à travers le caractère  $\kappa$ . L'ensemble des points géométriques  $s$  de  $S$  tels que  $\kappa : \Pi_0 \rightarrow \overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times$  se factorise à travers  $\Pi_0 \rightarrow \pi_0(P_s)$  forme un sous-schéma fermé de  $S$  que nous allons noter  $S_\kappa$ . Il est clair que le faisceau  $(\overline{\mathbb{Q}}_\ell^{\text{Irr}(M/S)})_\kappa$  est supporté par  $S_\kappa$ .

**7.1.12.** — D'après le lemme d'homotopie, le faisceau  $P$  agit sur les faisceaux pervers de cohomologie  $K^n = {}^p\text{H}^n(f_*\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$  à travers le quotient  $\pi_0(P)$ . Par conséquent, le groupe fini  $\Pi_0$  agit sur le faisceau pervers  $K^n$  qui induit une décomposition en somme directe

$$K^n = \bigoplus_{\kappa \in \Pi_0^*} K_\kappa^n$$

où  $\Pi_0^* = \text{Hom}(\Pi_0, \overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times)$ .

Voici une généralisation de 7.1.5.

**Théorème 7.1.13.** — Soient  $M$  et  $S$  des  $k$ -schémas lisses et  $f : M \rightarrow S$  un morphisme propre plat de fibres géométriques réduites de dimension  $d$ . Soit  $P$  un  $S$ -schéma en groupes commutatifs lisse de type fini et de

dimension relative  $d$  qui agit sur  $M$  avec stabilisateurs affines. Supposons que le module de Tate  $T_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(P^0)$  est polarisable.

Soit  $\Pi_0 \rightarrow \pi_0(P)$  un homomorphisme d'un groupe fini  $\Pi_0$  dans le faisceau  $\pi_0(P)$  des composantes connexes des fibres de  $P$ . Soit  $\kappa \in \Pi_0^*$  un caractère de  $\Pi_0$ . Soit  $S_\kappa$  le fermé de  $S$  des points  $s \in S$  tel que  $\kappa : \Pi_0 \rightarrow \overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times$  se factorise à travers  $\pi_0(P_s)$ .

Considérons une stratification

$$S \otimes_k \bar{k} = \bigsqcup_{\sigma \in \Sigma} S_\sigma$$

telle que pour tout  $\sigma \in \Sigma$ ,  $S_\sigma$  est irréductible et telle que la restriction du faisceau  $(\overline{\mathbb{Q}}_\ell^{\text{Irr}(M/S)})_\kappa$  à chaque strate  $S_\sigma$  est localement constante. Le fermé  $S_\kappa$  est alors nécessairement une réunion des strates  $S_\sigma$  pour  $\sigma$  dans un sous-ensemble de  $\Sigma$ .

Soit  $K$  un faisceau pervers géométriquement simple présent dans  $K_\kappa^n$  dont le support est un sous-schéma fermé irréductible  $Z$  de  $S \otimes_k \bar{k}$ . Supposons que  $\delta_Z \geq \text{codim}(Z)$ . Alors  $Z$  est l'adhérence de l'une des strates  $S_\sigma$  qui sont contenues dans  $S_\kappa$ .

Signalons un corollaire immédiat de ce théorème.

**Corollaire 7.1.14.** — Si nous supposons en plus que  $P$  est  $\delta$ -régulier alors tous les supports des faisceaux pervers géométriquement simples présents dans  $K_\kappa^n$  sont des adhérences de strates  $S_\sigma$  contenues dans  $S_\kappa$ .

**7.1.15.** — De nouveau, l'analogue de 7.1.13 pour le faisceau de cohomologie ordinaire de degré maximal de  $f_* \overline{\mathbb{Q}}_\ell$  à la place des faisceaux pervers de cohomologie  $K^n$  résulte immédiatement des lemmes 7.1.8 et 7.1.9.

**7.1.16.** — En général, le problème de trouver une stratification de  $S$  telle que la restriction du faisceau  $(\overline{\mathbb{Q}}_\ell^{\text{Irr}(M/S)})_\kappa$  à chaque strate est localement constante, est accessible car il s'agit d'étudier la variation en fonction de  $s$  de la représentation du groupe fini  $\pi_0(P_s)$  sur l'espace vectoriel de dimension finies  $\text{Irr}(M_s)$  qui sont complètement explicites. Sur l'ouvert anisotrope de la fibration de Hitchin la situation est encore plus favorable comme nous allons voir.



Supposons qu'il existe un ouvert  $M^{\text{reg}}$  de  $M$  qui est dense dans chaque fibre de  $f$  et tel que  $P$  agit simplement transitivement sur  $M^{\text{reg}}$ . Supposons aussi qu'il existe une section  $S \rightarrow M^{\text{reg}}$ . On a alors des isomorphismes

$$\text{Irr}(M/S) = \pi_0(M^{\text{reg}}/S) = \pi_0(P)$$

des faisceaux d'ensembles munis d'action de  $\pi_0(P)$ . Ici  $\pi_0(P)$  agit sur lui-même par translation.

Si  $S$  est un trait hensélien de point fermé  $s_0$ , la flèche de spécialisation  $\text{Irr}(M_{s_0}) \rightarrow \text{Irr}(M_s)$  est surjectif car  $M$  est propre sur  $S$ . Cette surjectivité de la flèche de spécialisation est donc aussi vérifiée pour les faisceaux de groupes abéliens  $\pi_0(P)$ . Localement pour la topologie étale de  $S$ , il existe donc un homomorphisme surjectif  $\Pi_0 \rightarrow \pi_0(P)$  d'un groupe constant  $\Pi_0$  sur  $\pi_0(P)$ . Pour simplifier, nous allons supposer l'existence de l'homomorphisme surjectif  $\Pi_0 \rightarrow \pi_0(P)$  sur  $S$ .

**Lemme 7.1.17.** — *Supposons que  $\text{Irr}(M/S) = \pi_0(M^{\text{reg}}/S) = \pi_0(P)$  et qu'il existe un homomorphisme surjectif  $\Pi_0 \rightarrow \pi_0(P)$  comme ci-dessus. Soient  $\kappa : \Pi_0 \rightarrow \overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times$  un caractère de  $\Pi_0$ . Soit  $S_\kappa$  le fermé de  $S$  des points  $s \in S$  tel que  $\kappa$  se factorise à travers  $\Pi_0 \rightarrow \pi_0(P_s)$  et  $i_\kappa : S_\kappa \rightarrow S$  l'immersion fermée. On a alors un isomorphisme*

$$(\overline{\mathbb{Q}}_\ell^{\text{Irr}(M/S)})_\kappa = i_{\kappa,*} \overline{\mathbb{Q}}_\ell.$$

*Démonstration.* — On a une décomposition du faisceau constant  $\overline{\mathbb{Q}}_\ell^{\Pi_0}$  en somme directe

$$\overline{\mathbb{Q}}_\ell^{\Pi_0} = \bigoplus_{\kappa \in \Pi_0^*} (\overline{\mathbb{Q}}_\ell)_\kappa$$

où  $\Pi_0$  agit sur  $(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)_\kappa$  via le caractère  $\kappa$ . L'homomorphisme surjectif  $\Pi_0 \rightarrow \pi_0(P)$  induit alors un homomorphisme surjectif de faisceaux  $\ell$ -adiques

$$(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)_\kappa \rightarrow (\overline{\mathbb{Q}}_\ell^{\text{Irr}(M/S)})_\kappa$$

dont la fibre est nulle en dehors de  $S_\kappa$  et non nulle sur  $S_\kappa$ . Le lemme s'en déduit.  $\square$

En combinant le corollaire 7.1.14 et le lemme 7.1.17, on obtient une description complète des supports des faisceaux pervers simples sous des hypothèses favorables.

**Corollaire 7.1.18.** — *Soient  $M$  et  $S$  des  $k$ -schémas lisses et  $f : M \rightarrow S$  un morphisme propre plat de fibres géométriques réduites de dimension*

d. Soit  $P$  un  $S$ -schéma en groupes commutatifs lisse de type fini et de dimension relative  $d$  qui agit sur  $M$  avec stabilisateurs affines. Supposons que les hypothèses suivantes soient vérifiées :

- (1) le module de Tate  $T_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(P^0)$  est polarisable,
- (2)  $\text{Irr}(M/S) = \pi_0(M^{\text{reg}}/S) = \pi_0(P)$ ,
- (3) il existe un homomorphisme surjectif d'un faisceau constant  $\Pi_0$  sur le faisceau  $\pi_0(P)$ .

Alors, pour tout  $\kappa \in \Pi_0^*$ , soit  $K$  un faisceau pervers géométriquement simple  $K$  présent dans  ${}^p\text{H}^n(f_*\overline{\mathbb{Q}}_\ell)_\kappa$  de support  $Z$  vérifiant  $\text{codim}(Z) \geq \delta_Z$ . Alors  $Z$  est égal à une des composantes irréductibles de  $S_\kappa$ .

Si on suppose de plus que  $P$  est  $\delta$ -régulier, alors le support de n'importe quel faisceau pervers géométriquement simple présent dans  ${}^p\text{H}^n(f_*\overline{\mathbb{Q}}_\ell)_\kappa$  est égal à une des composantes irréductibles de  $S_\kappa$ .

**7.2. Amplitude.** — Nous allons introduire la notion de l'amplitude de chaque support qui joue un rôle clé dans la démonstration de 7.1.13. Nous allons garder les notations de 7.1.13. Pour tout  $\kappa \in \Pi_0^*$ , pour tout entier  $n$ , le faisceau pervers de cohomologie  $K_\kappa^n$  est un géométriquement semi-simple. En regroupant ses facteurs simples ayant le même support, on obtient une décomposition canonique

$$(7.2.1) \quad \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} K_\kappa^n = \bigoplus_{\alpha \in \mathfrak{A}_\kappa} K_\alpha^n$$

où  $\mathfrak{A}_\kappa$  est une collection finie de sous-schémas fermés irréductibles  $Z_\alpha$  de  $S \otimes_k \bar{k}$  et où  $K_\alpha^n$  est la somme directe des facteurs simples de  $K_\kappa^n$  de support  $Z_\alpha$ . En supposant que pour tout  $\alpha \in \mathfrak{A}_\kappa$ ,  $K_\alpha^n$  est non nul pour au moins un entier  $n$ , l'ensemble  $\mathfrak{A}_\kappa$  est uniquement déterminé. Pour tout  $\alpha \in \mathfrak{A}_\kappa$ ,  $K_\alpha^n$  est un facteur direct canonique de  $K_\kappa^n$ .

**7.2.2.** — On va maintenant introduire la notion d'amplitude de  $\alpha \in \mathfrak{A}_\kappa$ . Pour tout  $\alpha$ , notons

$$\text{occ}(\alpha) = \{n \in \mathbb{Z} \mid K_\alpha^n \neq 0\}.$$

Notons aussi  $n_+(\alpha)$  l'élément maximal de  $\text{occ}(\alpha)$  et  $n_-(\alpha)$  l'élément minimal. On définit l'amplitude de  $\alpha$  par la formule

$$\text{amp}(\alpha) = n_+(\alpha) - n_-(\alpha).$$

Voici une estimation cruciale de l'amplitude dont on reporte la démonstration à 7.5.

**Proposition 7.2.3.** — Gardons les notations de 7.1. Supposons que  $T_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(P^0)$  est polarisable cf. 7.1.4.

Pour tout  $\kappa \in \Pi_0^*$ , pour tout  $\alpha \in \mathfrak{A}_\kappa$ , soit  $\delta_\alpha$  la valeur minimale de l'invariant  $\delta : S(\bar{k}) \rightarrow \mathbb{N}$  sur le sous-schéma fermé irréductible  $Z_\alpha$ . Alors on a l'inégalité

$$\text{amp}(\alpha) \geq 2(d - \delta_\alpha)$$

où  $d$  est la dimension relative de  $g : P \rightarrow S$ .

**7.3. Démonstration du théorème du support.** — Dans ce paragraphe, nous allons démontrer le théorème du support 7.1.13 en admettant l'inégalité 7.2.3. La démonstration est fondée sur la dualité de Poincaré et un argument de comptage de dimension du à Goresky et MacPherson. Le lecteur consultera l'annexe cf. A pour voir comment cet argument marche dans un contexte plus général.

*Démonstration.* — Puisque  $M$  et  $S$  sont lisses sur  $k$ , la dualité de Poincaré-Verdier fournit isomorphisme de complexes

$$f_* \overline{\mathbb{Q}}_\ell = \underline{\text{RHom}}(f_* \overline{\mathbb{Q}}_\ell, \overline{\mathbb{Q}}_\ell[-2d](-d))$$

où  $d$  est la dimension relative de  $f$ . En prenant les faisceaux pervers de cohomologie, on obtient un isomorphisme

$$K^n = K^{2 \dim(M) - n, \vee}(\dim(M))$$

où  $\vee$  désigne la dualité de Verdier de la catégorie des complexes  $\ell$ -adiques sur  $S$  qui préserve la sous-catégorie des faisceaux pervers. Pour tout  $\kappa \in \Pi_0^*$ , on en déduit un isomorphisme entre les  $\kappa$ -parties

$$K_\kappa^n = K_\kappa^{2 \dim(M) - n, \vee}(\dim(M)).$$

Comme cet isomorphisme respecte la décomposition par le support 7.2.1, pour tout  $\alpha \in \mathfrak{A}_\kappa$ , l'ensemble d'entiers  $\text{occ}(\alpha)$  est symétrique par rapport à  $\dim(M)$ .

De plus, en admettant l'estimation de l'amplitude 7.2.3

$$\text{amp}(\alpha) \geq 2(d - \delta_\alpha)$$

on constate qu'il existe un entier  $n \in \text{occ}(\alpha)$  tel que

$$n \geq \dim(M) + d - \delta_\alpha.$$

Il existe donc un faisceau pervers simple non nul  $K$  de support  $Z_\alpha$  tel que  $K$  soit un facteur direct de  $K_\kappa^n$  avec  $n \geq \dim(M) + d - \delta_\alpha$ .

Localement pour la topologie étale de  $S$ , il existe des relèvements  $\pi_0(P) \rightarrow P$  de l'homomorphisme surjectif  $P \rightarrow \pi_0(P)$ . En déduit une

action de  $\Pi_0$  sur le complexe  $f_*\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ . Puisque  $f_*\overline{\mathbb{Q}}_\ell$  est un complexe borné constructible, il existe une décomposition en somme directe

$$f_*\overline{\mathbb{Q}}_\ell = \bigoplus_{\kappa \in \Pi_0^*} (f_*\overline{\mathbb{Q}}_\ell)_\kappa$$

tel qu'il existe un entier  $N$  tel que pour tout  $\lambda \in \Pi_0$ ,  $(\lambda - \kappa(\lambda)\text{id})^N$  agit trivialement sur  $(f_*\overline{\mathbb{Q}}_\ell)_\kappa$  après changement de base à un recouvrement étale de  $S$ . Cette décomposition est indépendante du choix du relèvement  $\pi_0(P) \rightarrow P$  de sorte qu'on a en fait une décomposition canonique au-dessus de  $S$ . De plus, on a la compatibilité évidente

$${}^p\text{H}^n((f_*\overline{\mathbb{Q}}_\ell)_\kappa) = K_\kappa^n.$$

Ainsi  $K[-n]$  est un facteur direct du complexe  $(f_*\overline{\mathbb{Q}}_\ell)_\kappa$ .

Soit  $U_\alpha$  un ouvert dense de  $Z_\alpha$  où  $K$  est de la forme  $L[\dim(Z_\alpha)]$  où  $L$  est un système local irréductible sur  $U_\alpha$ . Soit  $V_\alpha$  un ouvert de  $S$  qui contient  $U_\alpha$  comme un fermé. Notons  $i_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha$ . Quitte à remplacer  $S$  par  $V_\alpha$ , on peut donc supposer que  $U_\alpha = Z_\alpha$ .

Soit  $u_\alpha$  un point géométrique de  $U_\alpha$ . Puisque  $L[-n]$  est un facteur direct de  $(f_*\overline{\mathbb{Q}}_\ell)_\kappa$ , la fibre en  $u_\alpha$  de  $L[-n]$  est un facteur direct de la fibre en  $u_\alpha$  de  $(f_*\overline{\mathbb{Q}}_\ell)_\kappa$ . La fibre en  $u_\alpha$  de  $(f_*\overline{\mathbb{Q}}_\ell)_\kappa$  est le complexe  $\text{R}\Gamma(M_{u_\alpha}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)_\kappa$  d'après le théorème de changement de base pour un morphisme propre alors que la fibre de  $L[-n]$  en  $u_\alpha$  est un  $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -espace vectoriel non nul placé en degré  $n - \dim(Z_\alpha)$ .

Il s'ensuit que

$$\text{H}^{n-\dim(Z_\alpha)}(M_{u_\alpha}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \neq 0.$$

Or, l'entier

$$n - \dim(Z_\alpha) = n - \dim(S) + \text{codim}(Z_\alpha)$$

est supérieur ou égal à

$$\dim(M) + d - \delta_\alpha - \dim(S) + \text{codim}(Z_\alpha).$$

Par hypothèse, on a l'inégalité

$$\text{codim}(Z_\alpha) \geq \delta_\alpha.$$

En la combinant avec l'égalité évidente  $\dim(M) - \dim(A) = d$ , on en déduit l'inégalité

$$n - \dim(Z_\alpha) \geq 2d.$$

Comme la dimension de la fibre  $M_{u_\alpha}$  est égale à  $d$ , la non-annulation  $\text{H}^{n-\dim(Z)}(M_{u_\alpha}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \neq 0$  implique que  $n - \dim(Z_\alpha) = 2d$ .

En tronquant par l'opérateur  $\tau^{\geq 2d}$ , on trouve que  $i_{\alpha*}L[-n + \dim(U_{\alpha})]$  est un facteur direct de  $H^{2d}(f_*\overline{\mathbb{Q}}_{\ell})_{\kappa}[-2d]$  donc  $i_{\alpha*}L$  est un facteur direct de  $H^{2d}(f_*\overline{\mathbb{Q}}_{\ell})_{\kappa}$ . Le théorème résulte donc de 7.1.9.  $\square$

**7.4. Cap-produit.** — Nous allons développer dans ce paragraphe certaines propriétés générales du cap-produit afin de démontrer l'inégalité d'amplitude 7.2.3.

**7.4.1.** — Nous nous plaçons dans la situation générale suivante. Soit  $S$  un schéma quelconque. Soit  $g : P \rightarrow S$  un  $S$ -schéma en groupes de type lisse commutatif de fibres connexes de dimension  $d$ . Considérons le complexe d'homologie de  $P$  sur  $S$  défini par la formule

$$\Lambda_P = g_!\overline{\mathbb{Q}}_{\ell}[2d](d).$$

Ce complexe est concentré en degrés négatifs. En degré 0, on a  $H^0(\Lambda_P) = \overline{\mathbb{Q}}_{\ell}$ . La partie la plus importante de  $\Lambda_P$  est

$$T_{\overline{\mathbb{Q}}_{\ell}}(P) := H^{-1}(\Lambda_P)$$

où  $T_{\overline{\mathbb{Q}}_{\ell}}(P)$  est un faisceau dont la fibre en chaque point géométrique  $s \in S$  est le  $\overline{\mathbb{Q}}_{\ell}$ -module de Tate  $T_{\overline{\mathbb{Q}}_{\ell}}(P_s)$  de la fibre de  $P$  en  $s$ . Plus généralement, le théorème de changement de base nous fournit un isomorphisme

$$H^{-i}(\Lambda_P)_s = H_c^{2d-i}(P_s)(d)$$

entre la fibre en  $s$  de  $H^{-i}(\Lambda_P)$  est le  $i$ -ème groupe d'homologie

$$H_i(P_s) = H_c^{2d-i}(P_s)(d)$$

de la fibre de  $P$  en  $s$ .

**7.4.2.** — Soit  $f : M \rightarrow S$  un morphisme de type fini muni d'une action de  $P$  relativement à la base  $S$

$$\text{act} : P \times_S M \rightarrow M.$$

Puisque  $P$  est lisse de dimension relative  $d$  sur  $S$ , le morphisme  $\text{act}$  est aussi lisse de même dimension relative. On a donc un morphisme trace

$$\text{act}_!\overline{\mathbb{Q}}_{\ell}[2d](d) \rightarrow \overline{\mathbb{Q}}_{\ell}$$

au-dessus de  $M$ . En poussant ce morphisme de trace par  $f_!$ , on obtient un morphisme

$$(g \times_S f)_!\overline{\mathbb{Q}}_{\ell}[2d](d) \rightarrow f_!\overline{\mathbb{Q}}_{\ell}.$$

En utilisant maintenant l'isomorphisme de Kunneth, on obtient un morphisme de cap-produit

$$\Lambda_P \otimes f_! \overline{\mathbb{Q}}_\ell \rightarrow f_! \overline{\mathbb{Q}}_\ell.$$

**7.4.3.** — Cette construction s'applique en particulier à  $f = g$ . Elle définit alors un morphisme de complexes

$$\Lambda_P \otimes \Lambda_P \rightarrow \Lambda_P.$$

On en déduit une structure d'algèbres graduées sur les faisceaux de cohomologie de  $\Lambda_P$

$$H^{-i}(\Lambda_P) \otimes H^{-j}(\Lambda_P) \rightarrow H^{-i-j}(\Lambda_P)$$

qui est commutative au sens gradué. On en déduit en particulier un morphisme de faisceaux

$$\wedge^i T_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(P) \rightarrow H^{-i}(\Lambda_P)$$

qui est en fait un isomorphisme. Pour le vérifier, il suffit de le faire fibre par fibre où on retrouve les groupes d'homologie de  $P_s$  munis du produit de Pontryagin.

**7.4.4.** — Comme m'a fait remarquer Deligne, la multiplication par entier  $N \neq 0$  induit la multiplication par  $N$  sur le module de Tate  $T_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(P)$  de  $P$  et induit donc la multiplication par  $N^i$  sur  $H^{-i}(\Lambda_P) = \wedge^i T_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(P)$ . On en déduit une décomposition canonique du complexe  $\Lambda_P$

$$\Lambda_P = \bigoplus_{i \geq 0} \wedge^i T_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(P)[i]$$

compatible avec la structure de cap-produit.

**Proposition 7.4.5.** — *Soit  $\bar{k}$  un corps algébriquement clos. Soit  $M$  un  $\bar{k}$ -schéma de type fini muni d'une action d'une  $\bar{k}$ -variété abélienne  $A$  avec stabilisateurs finis. Alors  $\bigoplus_n H_c^n(M)[-n]$  est un module libre sur l'algèbre graduée  $\Lambda_A = \bigoplus_i \wedge^i T_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(A)[i]$ .*

*Démonstration.* — Puisque le stabilisateur dans  $A$  de tout point de  $M$  est un sous-groupe fini, le quotient  $N = [M/A]$  est homéomorphe à un champ de Deligne-Mumford. Le morphisme  $m : M \rightarrow N$  étant un morphisme propre et lisse, il existe un isomorphisme non-canonique

$$m_* \overline{\mathbb{Q}}_\ell \simeq \bigoplus_i R^i m_* \overline{\mathbb{Q}}_\ell[-i]$$

où les  $R^i(m_*\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$  sont des systèmes locaux sur  $N$ . Puisque  $M \times_N M = A \times M$ , l'image inverse  $m^*R^i(m_*\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$  est le faisceau constant de valeur  $H^i(A)$  sur  $M$ . En utilisant cf. [6, 4.2.5], on obtient un isomorphisme canonique entre  $R^i(m_*\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$  est le faisceau constant sur  $N$  de valeur  $H^i(A)$ .

La décomposition en somme directe ci-dessus implique la dégénérescence de la suite spectrale

$$H_c^j(N, R^i m_* \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \Rightarrow H_c^{i+j}(M).$$

On en déduit dans  $\bigoplus_n H_c^n(M)$  une filtration  $\Lambda_A$ -stable dont le  $j$ -ième gradué est

$$\bigoplus_i H_c^j(N, R^i m_* \overline{\mathbb{Q}}_\ell) = H_c^j(N) \otimes \bigoplus_i H^i(A_s).$$

Ces gradués sont des  $\Lambda_A$ -modules libres. Il en résulte que la somme directe  $\bigoplus_n H_c^n(M)[-n]$  est un  $\Lambda_A$ -module libre.  $\square$

**7.4.6.** — Soit  $P$  un groupe algébrique commutatif lisse et connexe sur un corps algébriquement clos  $\bar{k}$ . D'après le théorème de Chevalley cf. [63],  $P$  admet un dévissage comme une extension d'une variété abélienne par un groupe affine

$$1 \rightarrow R \rightarrow P \rightarrow A \rightarrow 1$$

où  $A$  est une variété abélienne et où  $R$  est un groupe affine. Notons au passage que si  $P$  est défini sur un corps parfait, cette suite exacte existe au-dessus de ce même corps.

On en déduit de la suite exacte ci-dessus une suite exacte de modules de Tate

$$0 \rightarrow T_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(R) \rightarrow T_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(P) \rightarrow T_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(A) \rightarrow 0.$$

On appelle *relèvement homologique* une application linéaire

$$\lambda : T_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(A_s) \rightarrow T_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(P_s)$$

qui scinde cette suite exacte. Un relèvement homologique induit un homomorphisme d'algèbres  $\lambda : \Lambda_{A_s} \rightarrow \Lambda_s$  où  $\Lambda_{A_s} = \bigoplus_{-i} \wedge^i T_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(A_s)$  est l'algèbre d'homologie de la variété abélienne  $A_s$ . L'ensemble des relèvements homologiques de la partie abélienne forment un espace affine, torsseur sous le  $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -espace vectoriel  $\text{Hom}(T_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(A_s), T_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(R_s))$ . Si  $P$  est défini sur un corps fini, il existe un relèvement homologique canonique.

**Proposition 7.4.7.** — Soit  $P$  un groupe algébrique commutatif lisse et connexe défini sur un corps fini  $k$ . Soit

$$1 \rightarrow R \rightarrow P \rightarrow A \rightarrow 1$$

la suite exacte canonique qui réalise  $P$  comme une extension d'une variété abélienne  $A$  par un groupe affine  $R$ . Il existe alors un entier  $N > 0$  et un homomorphisme  $a : A \rightarrow P$  tel qu'en le composant avec  $P \rightarrow A$ , on obtient la multiplication par  $N$  dans  $A$ . On dira alors que  $a$  est un quasi-relèvement.

De plus,  $T_{\overline{\mathbb{Q}_\ell}}(a) : T_{\overline{\mathbb{Q}_\ell}}(A) \rightarrow T_{\overline{\mathbb{Q}_\ell}}(P)$  est l'application induite sur les modules de Tate, alors  $N^{-1}T_{\overline{\mathbb{Q}_\ell}}(a)$  est l'unique relèvement homologique compatible à l'action de  $\text{Gal}(\bar{k}/k)$  sur  $T_\ell(P)$  et  $T_\ell(A)$ . On dira que  $N^{-1}T_{\overline{\mathbb{Q}_\ell}}(a)$  est le relèvement canonique.

*Démonstration.* — D'après [65, p. 184], le groupe des extensions d'une variété abélienne  $A$  par  $\mathbb{G}_m$  s'identifie au groupe des  $k$ -points de la variété abélienne duale. Le groupe des extensions d'une variété abélienne par  $\mathbb{G}_a$  est le  $k$ -espace vectoriel de dimension finie  $H^1(A, \mathcal{O}_A)$ . Un groupe affine commutatif lisse connexe est isomorphe à un produit de  $\mathbb{G}_m$  et de  $\mathbb{G}_a$  après passer à une extension finie du corps de base, il s'ensuit que le groupe des extensions d'une variété abélienne  $A$  par un groupe affine commutatif lisse  $R$  défini sur un corps fini, est un groupe fini. La première assertion s'en déduit.

Le relèvement homologique  $N^{-1}T_{\overline{\mathbb{Q}_\ell}}(a)$  est invariant sous l'action de  $\text{Gal}(\bar{k}/k)$  puisque le relèvement  $a$  est défini sur  $k$ . Par ailleurs, l'élément de Frobenius  $\sigma \in \text{Gal}(\bar{k}/k)$  agit sur  $T_{\overline{\mathbb{Q}_\ell}}(A)$  par la multiplication par  $q^{-1/2}$  et sur  $T_{\overline{\mathbb{Q}_\ell}}(R)$  par la multiplication par  $q^{-1}$  où  $q$  est le cardinal du corps fini  $k$ . Ainsi  $N^{-1}T_{\overline{\mathbb{Q}_\ell}}(a)$  est le seul relèvement homologique compatible avec l'action de  $\text{Gal}(\bar{k}/k)$ .  $\square$

**Corollaire 7.4.8.** — Soit  $\bar{k}$  un corps algébriquement clos. Soit  $M$  un  $\bar{k}$ -schéma de type fini. Soit  $P$  un  $\bar{k}$ -groupe lisse commutatif et connexe agissant sur  $M$  avec stabilisateur affine. Soit  $A$  le quotient abélien maximal de  $P$ . Supposons que  $P$  est défini sur un corps fini de sorte qu'on a un quasi-relèvement  $a : A \rightarrow P$ . Alors le  $\Lambda_A$ -module qui se déduit du  $\Lambda_P$ -module  $\bigoplus_n H_c^n(M)$  est un module libre.

*Démonstration.* — Le quasi-relèvement  $a : A \rightarrow P$  définit une action de  $A$  sur  $M$  avec stabilisateurs finis. On se ramène donc immédiatement à la proposition 7.4.5.  $\square$

L'hypothèse que  $P$  soit défini sur un corps fini dans l'énoncé ci-dessus est bien curieuse. Voici un énoncé plus général et bien plus satisfaisant. Je reproduis la démonstration que j'ai apprise de Deligne cf. [18]. Cet



énoncé n'est pas indispensable pour la suite de l'argument mais il est beaucoup plus agréable d'en disposer.

**Proposition 7.4.9.** — *Soit  $\bar{k}$  un corps algébriquement clos. Soit  $M$  un  $\bar{k}$ -schéma de type fini. Soit  $P$  un  $\bar{k}$ -groupe lisse commutatif et connexe agissant sur  $M$  avec stabilisateur affine. Soit  $A$  le quotient abélien maximal de  $P$  et soit  $\lambda : T_{\overline{\mathbb{Q}_\ell}}(A) \rightarrow T_{\overline{\mathbb{Q}_\ell}}(P)$  n'importe quel relèvement homologique. Alors le  $\Lambda_A$ -module qui se déduit du  $\Lambda_P$ -module  $\bigoplus_n H_c^n(M)$  par  $\lambda$  est un module libre.*

*Démonstration.* — Par le procédé général de passage à la limite inductive comme dans [6, 6.1.7], on se ramène au cas où  $M, P$  et l'action de  $P$  sur  $M$  est défini sur un corps fini  $k$ . Ecrivons  $\bar{k}$  comme une limite inductive  $(A_i)_{i \in I}$  des anneaux de type fini sur  $\mathbb{Z}$ . La catégorie des  $\bar{k}$ -schémas de type fini est une 2-limite inductive des  $A_i$ -schémas de type fini c'est-à-dire pour tout  $X/\bar{k}$ , il existe  $i \in I$  et  $X_i/A_i$  de type fini tel que  $X = X_i \otimes_{A_i} \bar{k}$  cf. [27, 8.9.1] et pour tous  $X_i, Y_i/A_i$ , on a cf. [27, 8.8.2]

$$\mathrm{Hom}_{\bar{k}}(X_i \otimes_{A_i} \bar{k}, Y_i \otimes_{A_i} \bar{k}) = \varinjlim_{j \geq i} \mathrm{Hom}_{A_j}(X_i \otimes_{A_i} A_j, Y_i \otimes_{A_i} A_j).$$

Le même énoncé vaut donc pour la catégorie des groupes algébriques et celle des triplets formés d'un groupe algébrique  $G$ , d'un schéma de type fini  $X$  et d'une action de  $G$  sur  $X$ . Soit  $f : X \rightarrow Y$  un morphisme dans la catégorie des  $\bar{k}$ -schémas de type fini provenant d'un morphisme  $f_i : X_i \rightarrow Y_i$  dans la catégorie des  $A_i$ -schémas. Pour que  $f$  ait l'une des propriétés suivantes : plat, lisse, affine ou propre, il faut et il suffit que  $f_i$  acquière cette propriété après une extension de scalaires  $A_i \rightarrow A_j$  cf. [27, 11.2.6 et 8.10.5]. Il existe donc  $A_i$  de type fini sur  $\mathbb{Z}$  contenu dans  $\bar{k}$ , un  $A_i$ -schéma de type fini  $M_i$ , un  $A_i$ -schéma en groupes lisse  $P_i$  extension d'un schéma abélien par un schéma en groupes affine qui agit sur  $M_i$  avec stabilisateur affine tel que après l'extension des scalaires  $A_i \rightarrow \bar{k}$ , on retrouve la situation de départ. On peut également supposer que  $H^n(f_{i!} \overline{\mathbb{Q}_\ell})$  sont des systèmes locaux qui permet de ramener l'énoncé à démontrer à un point défini sur un corps fini.

On peut donc supposer que  $M, P$  et l'action de  $P$  sur  $M$  est défini sur un corps fini  $k$ . Soit  $A$  le quotient abélien de  $P$  et  $a : A \rightarrow P$  le quasi-relèvement qui définit un relèvement canonique  $\lambda_0 : T_{\overline{\mathbb{Q}_\ell}}(A) \rightarrow T_{\overline{\mathbb{Q}_\ell}}(M)$  de modules de Tate. On sait déjà que le  $\Lambda_A$ -module qui se déduit du  $\Lambda_P$ -module  $\bigoplus_n H_c^n(M)$  par  $\lambda_0$  est un module libre d'après le corollaire précédent 7.4.8.

Démontrons maintenant le même énoncé pour tout relèvement homologique  $\lambda$ . L'espace de tous les relèvements homologiques, pointé par  $\lambda_0$ , s'identifie au  $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$ -espace vectoriel  $\text{Hom}(T_{\overline{\mathbb{Q}_\ell}}(A_s), T_{\overline{\mathbb{Q}_\ell}}(R_s))$  sur lequel l'élément de Frobenius  $\sigma \in \text{Gal}(\bar{k}/k)$  agit avec les valeurs propres ayant pour valeur absolue  $|k|^{1/2}$ . Sur cet espace, l'ensemble des  $\lambda$  pour lequel la structure de  $\Lambda_{A_s}$ -module sur  $\bigoplus_n H_c^n(M)$  déduite de  $\lambda$  est libre forme un ouvert Zariski de  $\text{Hom}(T_{\overline{\mathbb{Q}_\ell}}(A_s), T_{\overline{\mathbb{Q}_\ell}}(R_s))$ . Cet ouvert est stable sous  $\sigma$  et contient l'origine  $\lambda_0$ . Son complément est un fermé stable sous  $\sigma$  qui ne contient pas  $\lambda_0$ . Puisque  $\sigma$  agit avec des valeurs propres de valeur absolue  $|k|^{1/2}$ , un fermé de  $\text{Hom}(T_{\overline{\mathbb{Q}_\ell}}(A_s), T_{\overline{\mathbb{Q}_\ell}}(R_s))$  stable sous  $\sigma$  est nécessairement stable sous l'action de  $\mathbb{G}_m$ . Le fait que ce fermé ne contient pas l'origine  $\lambda_0$  implique qu'il est vide.  $\square$

**7.4.10.** — Soit maintenant  $S$  un schéma strictement hensélien avec un morphisme  $\epsilon : S \rightarrow \text{Spec}(\bar{k})$  où  $\bar{k}$  est le corps résiduel de  $S$ . Notons  $s$  le point fermé de  $S$ . La fibre  $\Lambda_{P,s}$  s'identifie alors avec  $\epsilon_* \Lambda_P$ . On en déduit par adjonction un morphisme

$$\epsilon^* \Lambda_{P,s} \rightarrow \Lambda.$$

En restreignant le cap-produit 7.4.2 à  $\epsilon^* \Lambda_{P,s}$ , on obtient une flèche

$$\Lambda_{P,s} \boxtimes f_! \overline{\mathbb{Q}_\ell} \rightarrow f_! \overline{\mathbb{Q}_\ell}$$

qui définit une action de l'algèbre graduée  $\Lambda_{P,s} = \bigoplus_i \wedge^i T_{\overline{\mathbb{Q}_\ell}}(P_s)[i]$  sur le complexe  $f_! \overline{\mathbb{Q}_\ell}$ .

En particulier, on a un morphisme

$$T_{\overline{\mathbb{Q}_\ell}}(P_s) \otimes f_! \overline{\mathbb{Q}_\ell} \rightarrow f_! \overline{\mathbb{Q}_\ell}[-1].$$

On en déduit morphisme entre les tronqués pour la  $t$ -structure perverse :

$$T_{\overline{\mathbb{Q}_\ell}}(P_s) \otimes {}^p\tau^{\leq n}(f_! \overline{\mathbb{Q}_\ell}) \rightarrow {}^p\tau^{\leq n-1}(f_! \overline{\mathbb{Q}_\ell})$$

pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ . Ceci induit un morphisme entre les faisceaux pervers de cohomologie en degrés  $n$  et  $n-1$

$$T_{\overline{\mathbb{Q}_\ell}}(P_s) \otimes {}^pH^n(f_! \overline{\mathbb{Q}_\ell}) \rightarrow {}^pH^{n-1}(f_! \overline{\mathbb{Q}_\ell}).$$

On en déduit une action graduée de l'algèbre graduée  $\Lambda_{P,s}$  sur la somme directe  $\bigoplus_n {}^pH^n(f_! \overline{\mathbb{Q}_\ell})[-n]$ .

**7.4.11.** — La filtration  ${}^p\tau^{\leq n}(f_! \overline{\mathbb{Q}_\ell})$  de  $f_! \overline{\mathbb{Q}_\ell}$  définit une suite spectrale

$$E_2^{m,n} = H^m({}^pH^n(f_! \overline{\mathbb{Q}_\ell})_s) \Rightarrow H_c^{m+n}(M_s)$$

équivariante par rapport à l'action de  $\Lambda_{P,s}$ . Cette suite spectrale est convergente car le complexe  $f_! \overline{\mathbb{Q}}_\ell$  est borné. On dispose donc sur la somme directe

$$H_c(M_s) = \bigoplus_N H_c^N(M_s)[-N]$$

d'une filtration décroissante  $F^m H_c(M_s)$  telle que

$$F^m H_c(M_s) / F^{m+1} H_c(M_s) = \bigoplus_n E_\infty^{m,n}[-m-n].$$

L'action de  $\Lambda_{P,s}$  sur  $H_c(M_s)$  respecte cette filtration. L'action induite sur les gradués associés à la filtration  $F^m H_c(M_s)$

$$\bigoplus_n E_\infty^{m,n}[-m-n]$$

se déduit de son action sur les  $E_2^{m,n}$  qui à son tour se déduit de l'action graduée de  $\Lambda_{P,s}$  sur  $\bigoplus_n {}^p H^n(f_! \overline{\mathbb{Q}}_\ell)[-n]$ .

**7.4.12.** — Soient maintenant  $S$  un schéma de type fini sur un corps fini,  $P$  un  $S$ -schéma en groupes lisse commutatif de fibres connexes de dimension  $d$  et  $f : M \rightarrow S$  un morphisme propre dont la source  $M$  est un  $k$ -schéma lisse. Dans cette situation d'après Deligne, il existe un isomorphisme non-canonique

$$f_! \overline{\mathbb{Q}}_\ell \simeq {}^p H^n(f_! \overline{\mathbb{Q}}_\ell)[-n].$$

Cet isomorphisme subsiste quand on restreint à l'hensélisé strict  $S_s$  d'un point géométrique  $s$  de  $S$  de sorte que les suites spectrales 7.4.11 dégènerent en  $E_2$  c'est-à-dire  $E_\infty^{m,n} = E_2^{m,n}$ .

**7.4.13.** — Toujours sous l'hypothèse du numéro précédent, d'après le théorème de pureté de Deligne, le faisceau pervers  ${}^p H^n(f_! \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$  est pur. D'après le théorème de décomposition, sur  $S \otimes_k \bar{k}$  il est isomorphe à une somme directe de faisceaux pervers simples. On a une décomposition canonique de  ${}^p H^n(f_! \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$  par les supports : il existe une famille finie de fermés irréductibles  $Z_\alpha$  de  $S \otimes_k \bar{k}$  indexé par  $\alpha \in \mathfrak{A}$  tels que

$${}^p H^n(f_! \overline{\mathbb{Q}}_\ell) = \bigoplus_{\alpha \in \mathfrak{A}} K_\alpha^n.$$

où  $K_\alpha^n$  est la somme directe des facteurs simples de  ${}^p H^n(f_! \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$  ayant pour support le fermé irréductible  $Z_\alpha$ . Nous notons

$$K_\alpha = \bigoplus K_\alpha^n[-n]$$

et supposons que  $K_\alpha \neq 0$  pour tout  $\alpha \in \mathfrak{A}$ .

**Lemme 7.4.14.** — *Pour tout  $\alpha \in \mathfrak{A}$ , il existe un ouvert dense  $U_\alpha$  de  $Z_\alpha$  tel que les propriétés suivantes soient satisfaites :*

- $U_\alpha$  est lisse,
- pour tout  $\alpha' \in \mathfrak{A}$  différent de  $\alpha$  avec  $\dim(Z_{\alpha'}) \leq \dim(Z_\alpha)$ , on a  $U_\alpha \cap Z_{\alpha'} = \emptyset$ ,
- la restriction de  $K_\alpha^n$  à  $U_\alpha$  est de la forme  $L_\alpha^n[\dim(U_\alpha)]$  où  $L_\alpha^n$  est un système local pur de poids  $n$ . Notons  $L_\alpha = \bigoplus_n L_\alpha^n$ ,
- la restriction  $P_\alpha$  de  $P$  à  $U_\alpha$  admet un dévissage après un changement de base fini radiciel

$$1 \rightarrow R_\alpha \rightarrow P_\alpha \rightarrow A_\alpha \rightarrow 1$$

comme une extension d'une variété abélienne par un schéma en groupes affine qui induit une suite exacte de module de Tate sur  $U_\alpha$

$$0 \rightarrow T_{\overline{\mathbb{Q}_\ell}}(R_\alpha) \rightarrow T_{\overline{\mathbb{Q}_\ell}}(P_\alpha) \rightarrow T_{\overline{\mathbb{Q}_\ell}}(A_\alpha) \rightarrow 0,$$

- le module de Tate  $T_{\overline{\mathbb{Q}_\ell}}(R_\alpha)$  est un système local.

*Démonstration.* —  $Z_\alpha$  étant un  $\bar{k}$ -schéma irréductible réduit, il contient un ouvert dense lisse. Si  $\dim(Z_{\alpha'}) < \dim(Z_\alpha)$  ou  $\dim(Z_{\alpha'}) = \dim(Z_\alpha)$  mais  $\alpha' \neq \alpha$ , l'intersection  $Z_\alpha \cap Z_{\alpha'}$  est de dimension plus petite que celle de  $Z_\alpha$ . En retranchant ces intersections, il reste un ouvert dense de  $Z_\alpha$ . Il n'y a qu'un nombre fini de faisceaux pervers simples présents dans  $K_\alpha$ , on peut supposer que tous ces faisceaux pervers sont des systèmes locaux avec décalage en rétrécissant encore l'ouvert.

Le point générique  $\eta_\alpha$  de  $Z_\alpha$  n'étant pas nécessairement parfait. On peut passer à une extension finie inséparable  $\eta'_\alpha$  pour que  $P_{\eta_\alpha}$  admette un dévissage comme une extension d'une variété abélienne par un groupe affine. Considérons la normalisation  $Z'_\alpha$  de  $Z_\alpha$  dans  $\eta'_\alpha$ . Prenons l'image réciproque  $P_{Z'_\alpha}$  de  $P$  à  $Z'_\alpha$ , considérons l'adhérence de la partie affine de  $P_{\eta'_\alpha}$  dans  $P_{Z'_\alpha}$ . Dans un ouvert de  $Z'_\alpha$ , on peut réaliser ainsi  $P_{Z'_\alpha}$  comme une extension d'un schéma abélien par un schéma en groupes affines. En rétrécissant encore l'ouvert, on peut s'assurer que le module de Tate de la partie affine soit un système local.  $\square$

**7.4.15.** — Considérons le cap-produit par le module de Tate 7.4.2

$$T_{\overline{\mathbb{Q}_\ell}}(P) \otimes f_! \overline{\mathbb{Q}_\ell} \rightarrow f_! \overline{\mathbb{Q}_\ell}[-1].$$

Pour tout  $n$ , on dispose d'un morphisme

$$T_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(P) \otimes {}^p\tau^{\leq n}(f_!\overline{\mathbb{Q}}_\ell) \rightarrow f_!\overline{\mathbb{Q}}_\ell[-1].$$

Puisque le produit tensoriel  $T_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(P) \otimes {}^p\tau^{\leq n}(f_!\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$  appartient à

$$T_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(P) \otimes {}^p\tau^{\leq n}(f_!\overline{\mathbb{Q}}_\ell) \in {}^pD_c^{\leq n}(S, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$$

le morphisme ci-dessus se factorise par

$$T_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(P) \otimes {}^p\tau^{\leq n}(f_!\overline{\mathbb{Q}}_\ell) \rightarrow {}^p\tau^{\leq n}((f_!\overline{\mathbb{Q}}_\ell)[-1])$$

On en déduit une flèche

$$T_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(P) \otimes {}^p\tau^{\leq n}(f_!\overline{\mathbb{Q}}_\ell) \rightarrow {}^pH^{n-1}(f_!\overline{\mathbb{Q}}_\ell)[-n].$$

De nouveau parce que  $T_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(P) \otimes {}^p\tau^{\leq n-1}(f_!\overline{\mathbb{Q}}_\ell) \in {}^pD_c^{\leq n-1}(S, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ , la flèche ci-dessus se factorise par

$$T_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(P) \otimes {}^pH^n(f_!\overline{\mathbb{Q}}_\ell)[-n] \rightarrow {}^pH^{n-1}(f_!\overline{\mathbb{Q}}_\ell)[-n].$$

Considérons la décomposition par les supports

$$\bigoplus_{\alpha \in \mathfrak{A}} T_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(P) \otimes K_\alpha^n \rightarrow \bigoplus_{\alpha \in \mathfrak{A}} K_\alpha^{n-1}.$$

Pour tout  $\alpha \in \mathfrak{A}$ , on a donc une flèche canonique

$$T_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(P) \otimes K_\alpha^n \rightarrow K_\alpha^{n-1}.$$

**7.4.16.** — Soit  $U_\alpha$  l'ouvert dense du fermé  $Z_\alpha$  comme dans 7.4.14. Pour tout  $\alpha \in \mathfrak{A}$ , choisissons un ouvert de Zariski  $V_\alpha$  de  $S \otimes_k \bar{k}$  contenant  $U_\alpha$  comme un sous-schéma fermé. Notons  $i_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha$  l'immersion fermée. En restreignant la flèche ci-dessus à l'ouvert  $V_\alpha$ , on obtient un flèche

$$T_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(P) \otimes i_{\alpha*}L_\alpha^n[\dim(U_\alpha)] \rightarrow i_{\alpha*}L_\alpha^{n-1}[\dim(U_\alpha)].$$

Par la formule de projection, on a

$$T_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(P) \otimes i_{\alpha*}L_\alpha^n = i_{\alpha*}(T_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(P_\alpha) \otimes L_\alpha)$$

où  $T_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(P_\alpha)$  est la restriction de  $T_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(P)$  à  $U_\alpha$ . En appliquant le foncteur  $i_\alpha^*$  à

$$i_{\alpha*}(T_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(P_\alpha) \otimes L_\alpha^n) \rightarrow i_{\alpha*}L_\alpha^{n-1}$$

on obtient un morphisme

$$T_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(P_\alpha) \otimes L_\alpha^n \rightarrow L_\alpha^{n-1}$$

sur  $U_\alpha$ . C'est un morphisme entre systèmes locaux sur  $U_\alpha$  d'après l'hypothèse sur  $U_\alpha$  cf. 7.4.14.

**7.4.17.** — D'après 7.4.14, on a un dévissage de  $T_{\overline{\mathbb{Q}_\ell}}(P_\alpha)$

$$0 \rightarrow T_{\overline{\mathbb{Q}_\ell}}(R_\alpha) \rightarrow T_{\overline{\mathbb{Q}_\ell}}(P_\alpha) \rightarrow T_{\overline{\mathbb{Q}_\ell}}(A_\alpha) \rightarrow 0$$

où  $T_{\overline{\mathbb{Q}_\ell}}(A_\alpha)$  est un système local pur de poids  $-1$  et  $T_{\overline{\mathbb{Q}_\ell}}(R_\alpha)$  est un système local pur de poids  $-2$ . Puisque  $L_\alpha^n$  est pur de poids  $n$  et  $L_\alpha^{n-1}$  est pur de poids  $n-1$ , l'action de  $T_{\overline{\mathbb{Q}_\ell}}(P_\alpha)$  se factorise par  $T_{\overline{\mathbb{Q}_\ell}}(A_\alpha)$

$$T_{\overline{\mathbb{Q}_\ell}}(A_\alpha) \otimes L_\alpha^n \rightarrow L_\alpha^{n-1}.$$

On a donc muni à la somme directe de systèmes locaux  $L_\alpha = \bigoplus_n L_\alpha^n[-n]$  d'une structure de module gradué sur l'algèbre graduée  $\Lambda_{A_\alpha}$

$$\Lambda_{A_\alpha} \otimes L_\alpha \rightarrow L_\alpha.$$

En particulier, pour tout point géométrique  $u_\alpha$  de  $U_\alpha$ , la fibre  $L_{\alpha, u_\alpha}$  est un module gradué sur l'algèbre graduée de  $\Lambda_{A_\alpha, u_\alpha}$ .

**Lemme 7.4.18.** — *Soit  $U$  un  $k$ -schéma connexe. Soit  $\Lambda$  un système local gradué en un nombre fini de degrés négatifs avec  $\Lambda^0 = \overline{\mathbb{Q}_\ell}$  et qui est muni d'une structure d'algèbres graduées  $\Lambda \otimes \Lambda \rightarrow \Lambda$ . Soit  $L$  un système local gradué muni d'une structure de module gradué*

$$\Lambda \otimes L \rightarrow L.$$

*Supposons qu'il existe un point géométrique  $u$  de  $U$  tel que la fibre  $L_u$  de  $L$  en  $u$  est un module libre sur la fibre  $\Lambda_u$  de  $\Lambda$  en  $u$ . Supposons que  $L$  est semi-simple comme système local gradué. Alors, il existe un système local gradué  $E$  sur  $U$  et un isomorphisme*

$$L = \Lambda \otimes E$$

*compatible avec la structure de  $\Lambda$ -modules.*

*Démonstration.* — Considérons l'idéal d'augmentation de  $\Lambda$

$$\Lambda^+ = \bigoplus_{i>0} \Lambda^{-i}[i].$$

Considérons le conoyau  $E$  de la flèche

$$\Lambda^+ \otimes L \rightarrow L.$$

Puisque  $L$  est semi-simple, l'homomorphisme surjectif  $L \rightarrow E$  admet un relèvement  $E \rightarrow L$ . On va montrer que la flèche induite

$$\Lambda \otimes E \rightarrow L$$

est un isomorphisme. Puisqu'il s'agit d'une flèche entre systèmes locaux, pour vérifier que c'est un isomorphisme, il suffit de vérifier qu'il est un isomorphisme dans la fibre en  $u$ . Dans l'espace vectoriel  $L_u$ ,  $E_u$  est un sous-espace vectoriel complémentaire de  $\Lambda^+ L_u$ . La flèche

$$\Lambda_u \otimes E_u \rightarrow L_u$$

est donc surjective d'après le lemme de Nakayama. Elle est bijective car  $L_u$  étant un  $\Lambda_u$ -module libre, on a l'égalité de dimension

$$\dim_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(\Lambda_u) \times \dim_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(E_u) = \dim_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(L_u)$$

d'où le lemme.  $\square$

**Proposition 7.4.19.** — *Soit  $S$  un schéma de type fini sur un corps fini  $k$ . Soit  $f : X \rightarrow S$  un morphisme propre de source un  $k$ -schéma lisse  $X$ . Soit  $g : P \rightarrow S$  un schéma en groupes commutatif lisse de type fini ayant les fibres connexes de dimension  $d$ . Supposons que le stabilisateur dans  $P$  de n'importe quel point de  $M$  est affine. Supposons que le module de Tate  $T_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(P)$  est polarisable cf. 7.1.4.*

*Considérons la décomposition canonique par les supports*

$$K^n = \bigoplus_{\alpha \in \mathfrak{A}} K_\alpha^n$$

où  $\mathfrak{A}$  est un ensemble fini de sous-schémas fermés irréductibles  $Z_\alpha$  de  $S \otimes_k \bar{k}$  et où  $K_\alpha^n$  est la somme directe des facteurs géométriquement simples ayant pour support le sous-schéma irréductible  $Z_\alpha$ .

Si  $U_\alpha$  est un ouvert dense de  $Z_\alpha$  comme dans 7.4.14, en particulier tel que la restriction de  $K_\alpha^n$  à  $U_\alpha$  est un système local  $L_\alpha^n$  décalé de  $\dim(Z_\alpha)$  et que la restriction  $P_\alpha$  de  $P$  à  $U_\alpha$  admet un dévissage après un changement de base fini radiciel

$$1 \rightarrow R_\alpha \rightarrow P_\alpha \rightarrow A_\alpha \rightarrow 1.$$

Alors, pour tout point géométrique  $u_\alpha$  de  $U_\alpha$ , l'espace vectoriel gradué  $L_{\alpha, u_\alpha} = \bigoplus_n L_{\alpha, u_\alpha}^n$  est un module libre sur l'algèbre graduée  $\Lambda_{A_\alpha, u_\alpha}$ .

*Démonstration.* — Démontrons la proposition par une récurrence descendante sur la dimension de  $Z_\alpha$ . Soit  $\alpha_0 \in \mathfrak{A}$  l'élément maximal tel que  $Z_{\alpha_0}$  soit  $S \otimes_k \bar{k}$  tout entier. Soit  $U_{\alpha_0}$  un ouvert dense de  $S \otimes_k \bar{k}$  assez petit au sens de 7.4.14. On a alors

$${}^p H^n(f_* \overline{\mathbb{Q}}_\ell)|_{U_{\alpha_0}} = L_{\alpha_0}^n[\dim(S)]$$

où  $L_{\alpha_0}^n$  est un système local semi-simple sur  $U_{\alpha_0}$ . Cette somme directe est munie d'une action canonique de  $\Lambda_{A_\alpha}$  d'après 7.4.17.

Soit  $u_{\alpha_0}$  un point géométrique quelconque de  $U_{\alpha_0}$ . On a alors un isomorphisme

$$\bigoplus_n L_{\alpha_0, u_{\alpha_0}}^n = \bigoplus_n H_c^n(M_{u_{\alpha_0}})$$

compatible avec l'action de  $\Lambda_{P_{u_{\alpha_0}}}$ . Par la raison de poids comme dans 7.4.16, l'action de  $\Lambda_{P_{u_{\alpha_0}}}$  se factorise par  $\Lambda_{A_{u_{\alpha_0}}}$ .

En prenant un point géométrique  $u_{\alpha_0}$  au-dessus d'un point à valeur dans un corps fini, on dispose alors d'un relèvement canonique  $\lambda_0 : T_{\overline{\mathbb{Q}_\ell}}(A_{u_{\alpha_0}}) \rightarrow T_{\overline{\mathbb{Q}_\ell}}(P_{u_{\alpha_0}})$ . D'après 7.4.8, avec ce relèvement  $\bigoplus_n H_c^n(M_{u_{\alpha_0}})$  est un  $\Lambda_{A_{u_{\alpha_0}}}$ -module libre. Cette propriété est alors vraie pour n'importe quel point géométrique de  $U_{\alpha_0}$  et pour n'importe quel relèvement.

Le cas général est démontré essentiellement par la même méthode. On utilise la propriété de liberté de la cohomologie de la fibre  $M_{u_\alpha}$  pour déduire la liberté du système local gradué  $L_\alpha$  comme  $\Lambda_{A_\alpha}$ -module. La difficulté est de contrôler le bruit causé par les  $K_{\alpha'}$  avec  $\dim(Z_{\alpha'}) > \dim(Z_\alpha)$ . Notons que par récurrence, on peut supposer que pour ces  $\alpha'$ ,  $L_{\alpha'}$  est un module libre sur  $\Lambda_{A_{\alpha'}}$ .

Prenons un point géométrique  $u_\alpha$  de  $U_\alpha$  au-dessus d'un point à valeur dans un corps fini. Soit  $S_{u_\alpha}$  l'hensélisé strict de  $S$  en  $u_\alpha$ . La construction de 7.4.10 s'applique à  $S_{u_\alpha}$ . On dispose donc d'une action de  $\Lambda_{P, u_\alpha}$  sur la restriction de  $f_! \overline{\mathbb{Q}_\ell}$  à  $S_{u_\alpha}$

$$(7.4.20) \quad \Lambda_{P, u_\alpha} \boxtimes (f_! \overline{\mathbb{Q}_\ell}|_{S_\alpha}) \rightarrow (f_! \overline{\mathbb{Q}_\ell}|_{S_\alpha}).$$

Comme dans 7.4.10, celle-ci induit une action graduée de  $\Lambda_{P, u_\alpha}$  sur la somme directe de faisceaux pervers de cohomologie dont la partie de degré  $-1$  s'écrit

$$T_{\overline{\mathbb{Q}_\ell}}(P_{u_\alpha}) \otimes {}^p H^n(f_! \overline{\mathbb{Q}_\ell})|_{S_\alpha} \rightarrow {}^p H^{n-1}(f_! \overline{\mathbb{Q}_\ell})|_{S_\alpha}.$$

Cette flèche se décompose en somme directe suivant la décomposition canonique de  ${}^p H^n(f_! \overline{\mathbb{Q}_\ell})$  et  ${}^p H^{n-1}(f_! \overline{\mathbb{Q}_\ell})$  par le support

$$(7.4.21) \quad \bigoplus_{\alpha' \in \mathfrak{A}} T_{\overline{\mathbb{Q}_\ell}}(P_{u_\alpha}) \otimes K_{\alpha'}^n|_{S_\alpha} \rightarrow \bigoplus_{\alpha' \in \mathfrak{A}} K_{\alpha'}^{n-1}|_{S_\alpha}.$$

Si  $\alpha' \neq \alpha''$ , la flèche induite

$$T_{\overline{\mathbb{Q}_\ell}}(P_{u_\alpha}) \otimes K_{\alpha'}^n|_{S_\alpha} \rightarrow K_{\alpha''}^{n-1}|_{S_\alpha}$$



est nulle car  $T_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(P_{u_\alpha}) \otimes K_{\alpha'}^n|_{S_\alpha}$  est une extension successive de faisceaux pervers simples de support  $Z_{\alpha'} \cap S_\alpha$  alors que  $K_{\alpha''}^{n-1}|_{S_\alpha}$  est une extension successive de faisceaux pervers simples de support  $Z_{\alpha''} \cap S_\alpha$ . Ainsi, la flèche 7.4.21 est une somme directe des flèches

$$(7.4.22) \quad T_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(P_{u_\alpha}) \otimes K_{\alpha'}^n|_{S_\alpha} \rightarrow K_{\alpha'}^{n-1}|_{S_\alpha}$$

la somme étant étendue tous les  $\alpha' \in \mathfrak{A}$ . L'action graduée de  $\Lambda_{P, u_\alpha}$  sur  $\bigoplus_{\alpha' \in \mathfrak{A}} K_{\alpha'}|_{S_\alpha}$  se décompose donc en une somme directe de des actions graduées de  $\Lambda_{P, u_\alpha}$  sur chaque  $K_{\alpha'}|_{S_\alpha}$ .

Le point géométrique  $u_\alpha$  est au-dessus d'un point  $u_\alpha^0$  à valeur dans un corps fini. D'après 7.4.7, on a une décomposition canonique en somme directe

$$T_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(P_{u_\alpha}) = T_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(R_{u_\alpha}) \oplus T_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(A_{u_\alpha})$$

grâce à l'action de  $\text{Gal}(u_\alpha/u_\alpha^0)$ . On en déduit donc une action de  $T_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(A_{u_\alpha})$  sur  $f_! \overline{\mathbb{Q}}_\ell|_{S_\alpha}$

$$T_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(A_{u_\alpha}) \boxtimes (f_! \overline{\mathbb{Q}}_\ell|_{S_\alpha}) \rightarrow f_! \overline{\mathbb{Q}}_\ell|_{S_\alpha}[-1],$$

puis une action sur la somme directe des faisceaux pervers de cohomologie

$$T_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(A_{u_\alpha}) \otimes {}^p H^n(f_! \overline{\mathbb{Q}}_\ell)|_{S_\alpha} \rightarrow {}^p H^{n-1}(f_! \overline{\mathbb{Q}}_\ell)|_{S_\alpha}$$

laquelle se décompose en une somme directe des flèches

$$T_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(A_{u_\alpha}) \otimes K_{\alpha'}^n|_{S_\alpha} \rightarrow K_{\alpha'}^{n-1}|_{S_\alpha}$$

pour  $\alpha' \in \mathfrak{A}$ .

**Proposition 7.4.23.** — *Pour tout  $\alpha' \neq \alpha$ , pour tout entier  $m$ , le  $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -espace vectoriel gradué  $H^m(K_{\alpha', u_\alpha})$  est un  $\Lambda_{A_{u_\alpha}}$ -module libre.*

*Démonstration.* — Si  $\dim(Z_{\alpha'}) \leq \dim(Z_\alpha)$  avec  $\alpha' \neq \alpha$ , alors  $K_{\alpha'}|_{S_\alpha}$  est nul de sorte qu'il n'y a rien à démontrer. On peut donc supposer que  $\dim(Z_{\alpha'}) > \dim(Z_\alpha)$ .

Au-dessus de  $U_{\alpha'}$ , on a une flèche canonique entre systèmes locaux gradués

$$\Lambda_{A_{\alpha'}} \otimes L_{\alpha'} \rightarrow L_{\alpha'}$$

définie dans 7.4.17. D'après l'hypothèse de récurrence, pour tout point géométrique  $u_{\alpha'}$  de  $U_{\alpha'}$  défini sur un corps fini, la fibre de  $L_{\alpha'}$  en  $u_{\alpha'}$  est  $\Lambda_{A_{\alpha'}, u_{\alpha'}}$ -module libre. D'après le théorème de décomposition,  $L_{\alpha'}$  est un système local gradué semi-simple. En appliquant le lemme 7.4.18, on sait qu'il existe un système local gradué  $E_{\alpha'}$  sur  $U_{\alpha'}$  et un isomorphisme

$$L_{\alpha'} \simeq \Lambda_{A_{\alpha'}} \otimes E_{\alpha'}$$

en tant que  $\Lambda_{A_{\alpha'}}$ -modules gradués.

Sur l'intersection  $U_{\alpha'} \cap S_{\alpha}$  on a encore cette factorisation. Notons  $y_{\alpha'}$  le point générique de  $U_{\alpha'} \cap S_{\alpha}$  et  $\bar{y}_{\alpha'}$  un point géométrique au-dessus de  $y_{\alpha'}$ . On a alors un isomorphisme de représentations de  $\text{Gal}(\bar{y}_{\alpha'}/y_{\alpha'})$

$$L_{\alpha', \bar{y}_{\alpha'}} = \Lambda_{A_{\alpha', \bar{y}_{\alpha'}}} \otimes E_{\alpha', \bar{y}_{\alpha'}}.$$

La flèche de spécialisation

$$T_{\overline{\mathbb{Q}}_{\ell}}(P_{u_{\alpha}}) \rightarrow T_{\overline{\mathbb{Q}}_{\ell}}(P_{\bar{y}_{\alpha'}})$$

est injective et identifie  $T_{\overline{\mathbb{Q}}_{\ell}}(P_{u_{\alpha}})$  et le sous-espace vectoriel de  $T_{\overline{\mathbb{Q}}_{\ell}}(P_{\bar{y}_{\alpha'}})$  des vecteurs  $\text{Gal}(\bar{y}_{\alpha'}/y_{\alpha'})$ -invariants. Nous avons besoin de l'hypothèse  $T_{\overline{\mathbb{Q}}_{\ell}}(P)$  est polarisable dans le lemme intermédiaire suivant.

**Lemme 7.4.24.** — *Pour tout relèvement homologique*

$$T_{\overline{\mathbb{Q}}_{\ell}}(A_{u_{\alpha}}) \rightarrow T_{\overline{\mathbb{Q}}_{\ell}}(P_{u_{\alpha}}),$$

*l'application*

$$T_{\overline{\mathbb{Q}}_{\ell}}(A_{u_{\alpha}}) \rightarrow T_{\overline{\mathbb{Q}}_{\ell}}(A_{\bar{y}_{\alpha'}})$$

*qui s'en déduit est injective. De plus, il existe un complément de  $T_{\overline{\mathbb{Q}}_{\ell}}(A_{u_{\alpha}})$  dans  $T_{\overline{\mathbb{Q}}_{\ell}}(A_{\bar{y}_{\alpha'}})$  qui est  $\text{Gal}(\bar{y}_{\alpha'}/y_{\alpha'})$ -stable.*

*Démonstration.* — La flèche de spécialisation  $T_{\overline{\mathbb{Q}}_{\ell}}(P_{u_{\alpha}}) \rightarrow T_{\overline{\mathbb{Q}}_{\ell}}(P_{\bar{y}_{\alpha'}})$  est compatible avec la form alternée de polarisation. N'importe quel relèvement homologique  $T_{\overline{\mathbb{Q}}_{\ell}}(A_{u_{\alpha}}) \rightarrow T_{\overline{\mathbb{Q}}_{\ell}}(P_{u_{\alpha}})$  est compatible avec la forme alternée de sorte que l'application  $T_{\overline{\mathbb{Q}}_{\ell}}(A_{u_{\alpha}}) \rightarrow T_{\overline{\mathbb{Q}}_{\ell}}(P_{\bar{y}_{\alpha'}})$  qui s'en déduit l'est aussi. Il s'ensuit que  $T_{\overline{\mathbb{Q}}_{\ell}}(A_{u_{\alpha}}) \rightarrow T_{\overline{\mathbb{Q}}_{\ell}}(A_{\bar{y}_{\alpha'}})$  est injective et que l'orthogonal de  $T_{\overline{\mathbb{Q}}_{\ell}}(A_{u_{\alpha}})$  dans  $T_{\overline{\mathbb{Q}}_{\ell}}(A_{\bar{y}_{\alpha'}})$  est un complément  $\text{Gal}(\bar{y}_{\alpha'}/y_{\alpha'})$ -stable.  $\square$

Continuons la démonstration de 7.4.23. La décomposition en somme directe 7.4.24

$$T_{\overline{\mathbb{Q}}_{\ell}}(A_{\bar{y}_{\alpha'}}) = T_{\overline{\mathbb{Q}}_{\ell}}(A_{u_{\alpha}}) \oplus U$$

de représentations de  $\text{Gal}(\bar{y}_{\alpha'}/y_{\alpha'})$ . induit un isomorphisme de représentations de  $\text{Gal}(\bar{y}_{\alpha'}/y_{\alpha'})$

$$\Lambda_{A_{\bar{y}_{\alpha'}}} = \Lambda_{A_{u_{\alpha}}} \otimes \Lambda(U)$$

où  $\Lambda(U) = \bigoplus_i \wedge^i(U)[i]$ . Ceci implique une factorisation en produit tensoriel de représentations de  $\text{Gal}(\bar{y}_{\alpha'}/y_{\alpha'})$

$$L_{\alpha', \bar{y}_{\alpha'}} = \Lambda_{A_{u_{\alpha}}} \otimes \Lambda(U) \otimes E_{\alpha', \bar{y}_{\alpha'}}.$$

Il existe donc un isomorphisme

$$L_{\alpha'}|_{U_{\alpha'} \cap S_{\alpha}} = \Lambda_{A_{u_{\alpha}}} \boxtimes E'_{\alpha'}$$

où  $E'_{\alpha'}$  est un système local sur  $U_{\alpha'} \cap S_{\alpha}$ . Puisque le produit tensoriel externe avec  $\Lambda_{A_{u_{\alpha}}}$  commute avec le prolongement intermédiaire de  $U_{\alpha'} \cap S_{\alpha}$  à  $Z_{\alpha'} \cap S_{\alpha}$  et avec le foncteur fibre en  $u_{\alpha_0}$ , la proposition 7.4.23 s'en déduit.  $\square$

Considérons maintenant la suite spectrale 7.4.11

$$E_2^{m,n} = H^m({}^p H^n(f_* \overline{\mathbb{Q}}_{\ell})_{u_{\alpha}}) \Rightarrow H^{m+n}(M_{u_{\alpha}})$$

qui dégénère en  $E_2$  d'après 7.4.12. On obtient ainsi une filtration de

$$H = \bigoplus_j H^j(M_{u_{\alpha}})$$

dont le  $m$ -ème gradué est

$$\bigoplus_n H^m({}^p H^n(f_* \overline{\mathbb{Q}}_{\ell})_{s_0}).$$

Cette filtration est stable sous l'action de  $\Lambda_{A_{u_{\alpha}}}$ . Son action sur le  $m$ -ème gradué se déduit de l'action de  $\Lambda_{A_{u_{\alpha}}}$  sur la somme directe

$$\bigoplus_n {}^p H^n(f_* \overline{\mathbb{Q}}_{\ell})|_{S_{\alpha}}$$

et donc de celle sur les  $K_{\alpha'}|_{S_{\alpha}}$ . Ce  $m$ -ème gradué  $\bigoplus_n H^m({}^p H^n(f_* \overline{\mathbb{Q}}_{\ell})_{s_0})$  se décompose donc en une somme directe de  $\Lambda_{A_{u_{\alpha}}}$ -modules gradués

$$\bigoplus_{\alpha'} H^m(K_{\alpha', u_{\alpha}})$$

Pour  $\alpha' \neq \alpha$ , on sait déjà que  $H^m(K_{\alpha', u_{\alpha}})$  est un  $\Lambda_{A_{u_{\alpha}}}$ -module libre cf. 7.4.23. Pour  $\alpha' = \alpha$ , on a  $H^m(K_{\alpha, u_{\alpha}}) = 0$  sauf pour  $m = -\dim(Z_{\alpha})$ . On obtient ainsi une filtration de  $H$  par des sous  $\Lambda_{A_{u_{\alpha}}}$ -modules

$$0 \subset H' \subset H'' \subset H = \bigoplus_j H^j(M_{u_{\alpha}})$$

tels que  $H'$  et  $H/H''$  sont des  $\Lambda_{A_{u_{\alpha}}}$ -modules libres et tel que

$$H''/H' = L_{\alpha, u_{\alpha}}.$$

D'après 7.4.8, on sait que  $H$  est aussi un  $\Lambda_{A_{u_{\alpha}}}$ -module libre. On va en déduire que  $L_{\alpha, u_{\alpha}}$  est aussi un  $\Lambda_{A_{u_{\alpha}}}$ -module libre par une propriété particulière de l'anneau  $\Lambda_{A_{u_{\alpha}}}$ .

Puisque  $\Lambda_{A_{u_\alpha}}$  est une algèbre locale, tout  $\Lambda_{A_{u_\alpha}}$ -module projectif est libre. La suite exacte

$$0 \rightarrow H'' \rightarrow H \rightarrow H/H'' \rightarrow 0$$

avec  $H$  et  $H/H''$  libres, implique que  $H''$  est aussi libre.

Notons aussi que  $\Lambda_{A_{u_\alpha}}$  est une  $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -algèbre de locale dimension finie ayant un socle de dimension un. On en déduit que le dual  $(\Lambda_{A_{u_\alpha}})^*$  de  $\Lambda_{A_{u_\alpha}}$  en tant que  $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -espaces vectoriels est un  $\Lambda_{A_{u_\alpha}}$ -module libre. Considérons la suite exacte duale

$$0 \rightarrow (H''/H')^* \rightarrow (H'')^* \rightarrow (H')^* \rightarrow 0$$

où  $(H'')^*$  et  $(H')^*$  sont des  $\Lambda_{A_{u_\alpha}}$ -modules libres. Il s'ensuit que  $(H''/H')^*$  est un  $\Lambda_{A_{u_\alpha}}$ -module libre de sorte que  $H''/H'$  l'est aussi.  $\square$

**Remarque 7.4.25.** — La discussion de ce paragraphe s'étend mot pour mot au cas où  $P$  a éventuellement des fibres non connexes. Soit  $g : P \rightarrow S$  un  $S$ -schéma en groupe lisse de type fini agissant sur un  $S$ -schéma propre  $f : M \rightarrow S$ . Supposons que  $M$  est lisse au-dessus du corps de base  $k$ . Soit  $\pi_0(P)$  le faisceau des composantes connexes des fibres de  $P$ . Comme dans 7.1.12, supposons qu'il existe un groupe fini  $\Pi_0$  est un homomorphisme surjectif  $\Pi_0 \rightarrow \pi_0(P)$ . On a alors une décomposition caninque en somme directe

$$f_* \overline{\mathbb{Q}}_\ell = \bigoplus_{\kappa \in \Pi_0^*} (f_* \overline{\mathbb{Q}}_\ell)_\kappa$$

telle que pour tout  $x \in \Pi_0$ ,  $(x - \kappa(x))^N$  agit trivialement sur  $(f_* \overline{\mathbb{Q}}_\ell)_\kappa$  pour un certain entier  $N$ .

Pour tout  $\kappa \in \Pi_0^*$ , il existe un ensemble fini  $\mathfrak{A}_\kappa$  de sous-schémas fermés  $Z_\alpha$  de  $S \otimes_k \bar{k}$  tel qu'on a des décompositions en somme directe canonique

$$K_\kappa^n = \bigoplus_{\alpha \in \mathfrak{A}_\kappa} K_\alpha^n$$

où  $K_\kappa^n = {}^p H^n((f_* \overline{\mathbb{Q}}_\ell)_\kappa)$  et  $K_\kappa^n$  est la somme directe des facteurs simples de  $K_\kappa^n$  de support  $Z_\alpha$ . Le lemme 7.4.14 s'applique à  $Z_\alpha$ ; en particulier, il existe un ouvert dense  $U_\alpha$  de  $Z_\alpha$  au-dessus duquel  $K_\alpha^n$  est un système local  $L_\alpha^n$  avec un décalage et la composante neutre  $P_\alpha^0$  de  $P|_{U_\alpha}$  admet un quotient abélien  $A_\alpha$  après un changement de base radiciel qui fibre par fibre est le dévissage de Chevalley. La proposition 7.4.19 s'applique à  $L_\alpha^n$  c'est-à-dire  $\bigoplus_n L_\alpha^n$  est un module libre sur l'algèbre d'homologie de  $A_\alpha$ .

**7.5. Démonstration de l'inégalité d'amplitude.** — 7.2.3 est une conséquence immédiate de 7.4.19 et de la remarque 7.4.25.

*Démonstration.* — Soit  $\kappa \in \Pi_0^*$  et  $\alpha \in \mathfrak{A}_\kappa$ . Soit  $Z_\alpha$  un sous-schéma fermé irréductible de  $S \otimes_k \bar{k}$  correspondant. Comme dans 7.4.14, il existe un ouvert dense de  $U_\alpha$  de  $Z_\alpha$  tel que la restriction de  $K_\alpha^n$  à  $U_\alpha$  est un système local  $L_\alpha^n$  avec un décalage et la restriction de  $P^0$  à  $U_\alpha$  admet un quotient abélien  $A_\alpha$  après un changement de base radiciel tel que fibre par fibre on trouve le dévissage de Chevalley. D'après 7.4.19 et en tenant compte de la remarque 7.4.25,  $\bigoplus_n L_\alpha^n$  est un module libre sur l'algèbre  $\Lambda_{A_\alpha}$  des homologies de  $A_\alpha$ . Puisque c'est un module non nul, son amplitude est supérieure ou égale à celle de  $\Lambda_{A_\alpha}$  égale à  $2(d - \delta_\alpha)$ . On en déduit l'inégalité

$$\text{amp}(\alpha) \geq 2(d - \delta_\alpha)$$

qu'on voulait.  $\square$

**Remarque 7.5.1.** — Notons les résultats de ce paragraphe restent inchangés si au lieu de  $k$ -schémas  $P$  et  $M$  on a des champs de Deligne-Mumford.

**7.6. Le cas de la fibration de Hitchin.** — Nous allons maintenant appliquer le théorème général du support au cas particulier de la fibration de Hitchin ou plus précisément à sa partie anisotrope. Il s'agit de vérifier que les hypothèses de 7.1.18 est bien vérifiées et d'en tirer les conséquences.

Rappelons qu'on a un morphisme propre plat de fibres réduites  $f^{\text{ani}} : \mathcal{M}^{\text{ani}} \rightarrow \mathcal{A}^{\text{ani}}$  de source d'un champ de Deligne-Mumford lisse et de but un ouvert d'un espace affine standard. On a aussi défini un champs de Picard de Deligne-Mumford  $\mathcal{P}^{\text{ani}} \rightarrow \mathcal{A}^{\text{ani}}$  qui agit sur  $\mathcal{M}^{\text{ani}}$ . D'après 4.14.1, il existe un ouvert  $\mathcal{M}^{\text{reg,ani}}$  de  $\mathcal{M}^{\text{ani}}$  au-dessus duquel  $\mathcal{P}^{\text{ani}}$  agit simplement transitivement et une section  $\mathcal{A}^{\text{ani}} \rightarrow \mathcal{M}^{\text{reg,ani}}$  de sorte qu'on a

$$\text{Irr}(\mathcal{M}^{\text{ani}}/\mathcal{A}^{\text{ani}}) = \pi_0(\mathcal{M}^{\text{reg,ani}}/\mathcal{A}^{\text{ani}}) = \pi_0(\mathcal{P}^{\text{ani}}/\mathcal{A}^{\text{ani}}).$$

En passant à l'ouvert étale  $\tilde{\mathcal{A}}$ , on a vu qu'il existe un homomorphisme surjectif

$$\Pi_0 \longrightarrow \pi_0(\mathcal{P}^{\text{ani}}/\mathcal{A}^{\text{ani}})|_{\tilde{\mathcal{A}}^{\text{ani}}}$$

d'un faisceau constant fini  $\Pi_0$  sur la restriction du faisceau  $\pi_0(\mathcal{P}^{\text{ani}}/\mathcal{A}^{\text{ani}})$  à  $\tilde{\mathcal{A}}^{\text{ani}}$ . Pour appliquer 7.1.18 au morphisme

$$\tilde{f}^{\text{ani}} : \tilde{\mathcal{M}}^{\text{ani}} \longrightarrow \tilde{\mathcal{A}}^{\text{ani}}$$

il ne reste qu'à vérifier l'assertion suivante.

**Proposition 7.6.1.** — *Le module de Tate  $T_{\overline{\mathbb{Q}_\ell}}(\mathcal{P}^{\text{ani}})$  est polarisable au sens de 7.1.4.*

La démonstration de cette proposition est fondée sur théorie de l'accouplement de Weil que nous allons rappeler pour la commodité du lecteur. Soit  $S$  un schéma local strictement hensélien. Soit  $c : C \rightarrow S$  un morphisme propre plat de fibres géométriquement réduites de dimension un.

Supposons que  $C$  est connexe. Considérons la factorisation de Stein  $C \rightarrow S' \rightarrow S$  où  $C \rightarrow S'$  est un morphisme propre de fibres connexes non vide et  $S' \rightarrow S$  est un morphisme fini. Puisque la fibre spéciale de  $c$  est réduite, le morphisme  $S' \rightarrow S$  est fini et étale. Puisque  $C$  est connexe,  $S'$  l'est aussi. Puisqu'on a supposé que  $S$  est strictement hensélien, on a alors  $S' = S$ . Autrement dit les fibres de  $c : C \rightarrow S$  sont connexes.

Considérons le  $S$ -champ d'Artin  $\text{Pic}_{C/S}$  qui associe à tout  $S$ -schéma  $Y$  le groupoïde des fibrés inversibles sur  $C \times_S Y$ . Il est lisse au-dessus de  $S$ . Considérons sa composante neutre  $\text{Pic}_{C/S}^0$ . Pour tout point  $L \in \text{Pic}_{X/S}(Y)$ , pour tout  $y \in Y$ , on peut définir caractéristique d'Euler-Poincaré  $\chi_y(L)$  de la restriction de  $L$  à  $C_y$ . Si  $Y$  est connexe, cet entier est indépendant de  $y$  et nous le notons  $\chi(L)$ . Si  $L \in \text{Pic}_{C/S}^0$ , on a  $\chi(L) = \chi(\mathcal{O}_C)$ .

Pour tout couple de  $L, L' \in \text{Pic}_{C/S}^0$ , nous définissons leur accouplement de Weil par la formule

$$\begin{aligned} \langle L, L' \rangle_{C/S} &= \det(Rc_*(L \otimes L')) \otimes \det(Rc_*L)^{\otimes -1} \\ &\quad \otimes \det(Rc_*L')^{\otimes -1} \otimes \det(Rc_*\mathcal{O}_C) \end{aligned}$$

en utilisant le déterminant de cohomologie. Si  $t$  est un automorphisme de  $L$  qui est alors un scalaire,  $t$  agit sur  $\det(Rc_*L)$  par le scalaire  $t^{\chi(L)}$ . En utilisant les égalités

$$\chi(L \otimes L') = \chi(L) = \chi(L') = \chi(\mathcal{O}_C)$$

pour  $L, L' \in \text{Pic}_{X/S}^0$ , on vérifie que pour tout couple de scalaires  $(t, t')$  l'action de  $t$  sur  $L$  et l'action de  $t'$  sur  $L'$  induisent l'identité sur  $\langle L, L' \rangle_{C/S}$ .

Si  $N$  est un entier inversible sur  $S$  et  $L$  est un fibré inversible muni d'un isomorphisme  $\iota_L : L^{\otimes N} \rightarrow \mathcal{O}_C$ , on a un isomorphisme

$$\langle L, L' \rangle_{C/S}^{\otimes N} = \mathcal{O}_S.$$

Si en plus  $L'$  est aussi muni d'un isomorphisme  $\iota_{L'} : L'^{\otimes N} \rightarrow \mathcal{O}_C$ , on a autre isomorphisme  $\langle L, L' \rangle_{C/S}^{\otimes N} = \mathcal{O}_S$ . La différence de ces deux isomorphismes définit une  $N$ -ème racine d'unité. Cette racine ne dépend que des classes d'isomorphisme de  $L$  et de  $L'$  en vertu de la discussion sur l'effet des scalaires.

Supposons maintenant que  $C$  est une courbe projective connexe sur un corps algébriquement clos  $k$ . Le champ  $\text{Pic}_C^0$  est alors le quotient d'un  $k$ -groupe algébrique commutative connexe  $\text{Jac}_C$  par  $\mathbb{G}_m$  agissant trivialement. La construction ci-dessus définit une forme alternée

$$\text{T}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(\text{Jac}_C) \times \text{T}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(\text{Jac}_C) \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_\ell(-1)$$

qui est non-dégénérée lorsque  $C$  est lisse. Pour terminer cette digression, il reste à considérer le comportement de l'accouplement de Weil vis-à-vis de la normalisation.

**Lemme 7.6.2.** — *Soit  $C$  une courbe projective réduite sur un corps algébriquement clos  $k$ . Soit  $C^\flat$  sa normalisation et  $\xi : C^\flat \rightarrow C$  le morphisme de normalisation. Soient  $L, L'$  deux fibrés inversibles sur  $C$ . On a alors un isomorphisme canonique de  $k$ -espaces vectoriels de dimension un*

$$\langle L, L' \rangle_C = \langle \xi^* L, \xi^* L' \rangle_{C^\flat}.$$

*Démonstration.* — On a une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_C \longrightarrow \xi_* \mathcal{O}_{C^\flat} \longrightarrow \mathcal{D} \longrightarrow 0$$

où  $\mathcal{D}$  est un  $\mathcal{O}_C$ -modules fini supporté par une collection finie de points  $\{c_1, \dots, c_n\}$  de  $C$ . Notons  $\mathcal{D}_i$  le facteur direct de  $\mathcal{D}$  supporté par  $c_i$  et  $d_i$  sa longueur. La multiplicativité du déterminant nous fournit alors un isomorphisme

$$\det(c_*^\flat \mathcal{O}_{C^\flat}) = \det(c_* \xi_* \mathcal{O}_{C^\flat}) = \det(c_* \mathcal{O}_C) \otimes \bigotimes_{i=1}^r \wedge^{d_i} \mathcal{D}_i$$

où on a noté  $c : C \rightarrow \text{Spec}(k)$  et  $c^\flat : C^\flat \rightarrow \text{Spec}(k)$  les morphismes structuraux.

Soit  $L$  un fibré inversible sur  $C$ . En utilisant la formule de produit  $\xi_* \xi^* L = (\xi_* \mathcal{O}) \otimes L$ , on obtient la formule

$$\det(c_*^\flat \xi^* L) = \det(c_* L) \otimes \bigotimes_{i=1}^r (L_{c_i}^{\otimes d_i} \otimes \wedge^{d_i} \mathcal{D}_i)$$

où  $L_{c_i}$  est la fibre de  $L$  en  $c_i$ . En appliquant cette formule à  $L \otimes L'$ ,  $L$  et à  $L'$ , on obtient le lemme.  $\square$

On est maintenant en mesure de démontrer la proposition 7.6.1.

*Démonstration.* — Rappelons que pour tout point  $a \in \mathcal{A}^\vee$ ,  $\mathcal{P}_a$  est le champ de Picard des  $J_a$ -torseurs sur  $X$ . Soit  $\pi_a : \tilde{X}_a \rightarrow X$  le revêtement camérale associée à  $a$ . D'après la description galoisienne du centralisateur régulier, on a un homomorphisme de faisceaux en groupes cf. 2.4.2

$$J_a \rightarrow \pi_{a,*}(T \times_X \tilde{X}_a)$$

où  $T$  est le tore maximal de  $G$  dans l'épinglage fixé. En considérant un déploiement  $X_\rho \rightarrow X$  de  $G$ , on obtient un revêtement fini étale  $\tilde{X}_{\rho,a} \rightarrow \tilde{X}_a$  par changement de base. Notons  $\pi_{\rho,a} : \tilde{X}_{\rho,a} \rightarrow X$  le morphisme composé. On a donc un homomorphisme

$$J_a \rightarrow \pi_{\rho,a,*}(\mathbb{T} \times \tilde{X}_{\rho,a}).$$

où  $\mathbb{T}$  est un tor déployé. La donnée d'un point de  $\ell^n$ -torsion de  $\mathcal{P}_a$  induit donc un point de  $\ell^n$  torsion de  $\text{Pic}_{\tilde{X}_{\rho,a}} \otimes \mathbb{X}_*(\mathbb{T})$ . En choisissant une forme symétrique invariante sur  $\mathbb{X}_*(\mathbb{T}) \otimes \overline{\mathbb{Q}_\ell}$  et en utilisant l'accouplement de Weil sur  $\text{Pic}_{\tilde{X}_{\rho,a}}^0$ , on obtient une forme alternée

$$\text{T}_{\overline{\mathbb{Q}_\ell}}(\mathcal{P}_a^0) \otimes \text{T}_{\overline{\mathbb{Q}_\ell}}(\mathcal{P}_a^0) \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}_\ell}(-1).$$

Il reste à démontrer qu'en chaque point géométrique  $a$ , cette forme symplectique est nulle sur la partie affine de  $\text{T}_\ell(\mathcal{P}_a)$  et induit un accouplement non dégénérée sur sa partie abélienne. Ceci se déduit du lemme 7.6.2  $\square$

**7.6.3.** — On peut maintenant appliquer 7.1.18 car toutes ses trois hypothèses ont été vérifiées. On ne peut pas toutefois tirer immédiatement une conclusion tangible car il ne s'applique qu'aux sous-schémas fermés irréductibles  $Z$  vérifiant l'inégalité

$$\text{codim}(Z) \geq \delta_Z.$$

Nous conjecturons que  $\mathcal{P}^{\text{ani}}$  est  $\delta$ -régulier au sens de 7.1.3 ce qui revient à dire que l'inégalité ci-dessus est satisfaite pour n'importe quel sous-schéma fermé irréductible  $Z$  de  $\mathcal{A}^{\text{ani}}$ . Cette conjecture est connue en caractéristique 0. En caractéristique  $p$ , on devra se contenter de l'énoncé plus faible 5.4.2.



**7.6.4.** — Soit  $\delta_H^{\text{bad}}(D)$  le plus petit entier tel que

$$\text{codim}_{\mathcal{A}_H}(\mathcal{A}_{H, \delta_H^{\text{bad}}(D)}) < \delta_H^{\text{bad}}(D).$$

Si cet entier n'existe pas, on pose  $\delta_H^{\text{bad}}(D) = \infty$ . Notons  $\mathcal{A}_H^{\text{bad}}$  la réunion de toutes les strates  $\mathcal{A}_{H, \delta_H}$  à  $\delta_H$  constant avec  $\delta_H \geq \delta_H^{\text{bad}}(D)$ . C'est un sous-schéma fermé de  $\mathcal{A}_H^{\heartsuit}$  qui est éventuellement vide. D'après 5.4.2, l'entier  $\delta_H^{\text{bad}}(D)$  tend vers l'infini quand  $\deg(D)$  tend vers l'infini.

**Lemme 7.6.5.** — *Soit  $Z$  un sous-schéma fermé irréductible de  $\tilde{\mathcal{A}}_H$  qui n'est pas contenu dans  $\tilde{\mathcal{A}}_H^{\text{bad}}$ . Alors on a*

$$\text{codim}_{\tilde{\mathcal{A}}_H}(Z) \geq \delta_{H,Z} \text{ et } \text{codim}_{\tilde{\mathcal{A}}}(Z) \geq \delta_Z$$

où  $\delta_{H,Z}$  est la valeur minimale de la fonction  $\delta_H : Z(\bar{k}) \rightarrow \mathbb{N}$  et où  $\delta_Z$  est la valeur minimale de la fonction  $\delta : Z(\bar{k}) \rightarrow \mathbb{N}$ .

*Démonstration.* — Puisque  $Z$  est irréductible, il est contenu dans l'adhérence de la strate à  $\delta_H$ -constant  $\tilde{\mathcal{A}}_{H, \delta_{H,Z}}$ . Comme  $Z$  n'est pas contenu dans  $\tilde{\mathcal{A}}_H^{\text{bad}}$ , on a  $\delta_{H,Z} < \delta_H^{\text{bad}}(D)$ . Il résulte de la définition de  $\delta_H^{\text{bad}}(D)$  que

$$\text{codim}_{\tilde{\mathcal{A}}_H}(\tilde{\mathcal{A}}_{H, \delta_{H,Z}}) \geq \delta_{H,Z}.$$

On en déduit la même inégalité pour  $\text{codim}_{\tilde{\mathcal{A}}_H}(Z)$ . L'inégalité portant sur  $\text{codim}_{\tilde{\mathcal{A}}}(Z)$  s'en déduit car d'après 4.15.3 et 4.15.1, la fonction

$$\delta - \delta_H : Z(\bar{k}) \rightarrow \mathbb{N}$$

est constante de valeur égale à  $\dim(\mathcal{A}) - \dim(\mathcal{A}_H)$ . □

Maintenant, 7.1.18 implique l'énoncé suivant.

**Théorème 7.6.6.** — *Soit  $K$  un facteur géométriquement simple de*

$$\bigoplus_n {}^p\text{H}^n(\tilde{f}_*^{\text{ani}} \overline{\mathbb{Q}}_\ell)_\kappa.$$

*Supposons que le support de  $K$  est contenu dans  $\tilde{\mathcal{A}}_H$  mais n'est pas contenu dans  $\tilde{\mathcal{A}}_H^{\text{bad}}$ . Alors il est égal à  $\tilde{\mathcal{A}}_H$ .*

Cet énoncé n'est pas aussi joli qu'on voudrait à cause de la présence du fantomatique  $\tilde{\mathcal{A}}_H^{\text{bad}}$ . Il suffit néanmoins pour démontrer le lemme fondamental avec l'aide de 5.4.2.

## 8. Comptage de points

Dans ce dernier chapitre, nous complétons la démonstration du théorème de stabilisation géométrique 6.4.3 ainsi que celle des conjectures de Langlands-Shelstad 1.11.1 et de Waldspurger 1.12.7 en s'appuyant le théorème 7.6.6.

La démonstration est fondée sur le principe suivant. Soit  $K_1, K_2$  deux complexes purs sur un  $k$ -schéma de type fini  $S$  irréductible. Supposons que tout faisceau pervers géométriquement simples présent dans  $K_1$  ou  $K_2$  a pour support  $S$  tout entier, alors pour démontrer que  $K_1$  et  $K_2$  ont la même classe dans le groupe de Grothendieck, il suffit de démontrer qu'il existe un ouvert dense  $U$  de  $S$  aussi petit que l'on veut, tel que pour toute extension finie  $k'$  de  $k$ , pour tout  $u \in U(k')$ , les traces du Frobenius  $\sigma_{k'}$  de  $k'$  sur  $K_{1,u}$  et  $K_{2,u}$  sont égales. L'égalité dans le groupe de Grothendieck implique qu'on ait la même égalité mais pour tout point  $s \in S(k')$ . Le comptage de points dans une fibre au-dessus d'un point d'un petit ouvert  $U$  devrait être beaucoup plus agréable que dans une fibre quelconque ce qui fait la force du théorème du support.

On va donc compter le nombre  $\sharp \mathcal{M}_a(k)$  des  $k$ -points dans une fibre de Hitchin anisotrope. Plus précisément, on veut une formule pour la partie stable  $\sharp \mathcal{M}_a(k)_{\text{st}}$ . La formule de produit 4.13.1 permet d'exprimer ce nombre comme un produit du nombre  $\sharp \mathcal{P}_a^0(k)$  des  $k$ -points de la composante neutre de  $\mathcal{P}_a$  et des nombres de points dans des quotients de fibres de Springer affine *cf.* 8.4. Pour ces quotients des fibres de Springer affines, un comptage plus ou moins direct donne comme résultat une intégrale orbitale stable *cf.* 8.2. On a aussi la variante du comptage avec une  $\kappa$ -pondération qui donne lieu aux  $\kappa$ -intégrales orbitales. A chaque fois, il s'agit du comptage de points d'un champ d'Artin de la forme  $[M/P]$  où  $M$  est un  $k$ -schéma et où  $P$  est un  $k$ -groupe algébrique agissant sur  $M$ . Ce formalisme est rappelé dans 8.1 en même temps qu'une formule des points fixes ad hoc qui a été démontrée dans l'appendice A.3 de [52].

Pour  $a \in \mathcal{A}^\diamond(k)$ , les quotients des fibres de Springer affines sont tous triviaux de sorte que  $\sharp \mathcal{M}_a(k)_{\text{st}}$  est égal au nombre  $\sharp \mathcal{P}_a^0(k)$  où  $\mathcal{P}_a^0$  est essentiellement une variété abélienne. Ceci permet de démontrer l'égalité les nombres  $\sharp \mathcal{M}_{1,a}(k)_{\text{st}}$  et  $\sharp \mathcal{M}_{2,a}(k)_{\text{st}}$  pour  $a \in \mathcal{A}^\diamond(k)$  associés à deux groupes  $G_1$  et  $G_2$  ayant des données radicielles isogènes. Le théorème de support 7.1.18 permet de prolonger l'identité à  $a \in (\mathcal{A}^{\text{ani}} - \mathcal{A}^{\text{bad}})(k)$ . On

obtient ainsi assez de points globaux pour obtenir toutes les intégrales orbitales stables locales en faisant tendre  $\deg(D)$  vers l'infini. On démontre ainsi le lemme fondamental non standard conjecturé par Waldspurger *cf.* 8.8. En renversant l'argument global-local, on peut prolonger l'identité  $\sharp\mathcal{M}_{1,a}(k)_{\text{st}} = \sharp\mathcal{M}_{2,a}(k)_{\text{st}}$  à tout  $a \in \mathcal{A}^{\text{ani}}(k)$ .

La démonstration de la conjecture de Langlands-Shelstad suit essentiellement la même stratégie avec un peu plus de difficultés techniques. Pour  $a_H \in \tilde{\mathcal{A}}_H^\diamond(k)$ , les intégrales orbitales stables locales de  $a_H$  sont triviales mais les  $\kappa$ -intégrales orbitales locales dans  $G$  du point  $a$  correspondant ne le sont pas nécessairement. Toutefois, en rétrécissant encore plus  $\tilde{\mathcal{A}}_H^\diamond$ , on peut supposer que ces  $\kappa$ -intégrales orbitales locales non triviales sont aussi simples que possibles. Le calcul de ces intégrales locales simples est bien connu et se ramène au cas  $\text{SL}(2)$  traité par Labesse et Langlands. On le reprend dans 8.3. En combinant ce calcul avec le théorème du support 7.1.18, on obtient la partie du théorème de stabilisation géométrique sur l'ouvert  $\tilde{\mathcal{A}}_H^{\text{ani}} - \tilde{\mathcal{A}}_H^{\text{bad}}$  *cf.* 8.5. De nouveau, en faisant tendre  $\deg(D)$  vers l'infini, on obtient toutes les intégrales orbitales locales et démontre ainsi le lemme fondamental *cf.* 8.6. En renversant l'argument global-local, on en déduit tout le théorème de stabilisation géométrique.

**8.1. Remarques générales sur le comptage.** — Nous allons fixer dans ce paragraphe un cadre pour les différents problèmes de comptage que nous devrons résoudre dans la suite. Nous allons aussi préciser les abus de notations que nous allons pratiquer systématiquement dans ce chapitre. Dans ce paragraphe et contrairement au reste de l'article, la lettre  $X$  ne désigne pas nécessairement une courbe.

**8.1.1.** — Si  $M$  est un  $k$ -schéma de type fini. D'après la formule de traces de Grothendieck-Lefschetz, le nombre de  $k$ -points de  $M$  peut être calculé comme une somme alternée de traces de l'élément de Frobenius  $\sigma \in \text{Gal}(\bar{k}/k)$

$$\sharp M(k) = \sum_n (-1)^n \text{tr}(\sigma, H_c^n(M))$$

où  $H_c^n(M)$  désigne le  $n$ -ème groupe de cohomologie à support compact  $H_c^n(M \otimes_k \bar{k}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$  de  $M \otimes_k \bar{k}$ .

Nous aurons besoin d'une variante de cette formule des traces dans le contexte suivant. Soit  $M$  un  $k$ -schéma de type fini ou plus généralement

un champ de Deligne-Mumford de type fini, muni d'une action d'un  $k$ -groupe algébrique commutatif de type fini  $P$ . Nous voulons relier la trace de  $\sigma$  sur une partie de la cohomologie à support de  $M$  avec le nombre de points du quotient  $X = [M/P]$  et le nombre de points de la composante neutre de  $P$ . C'est le contenu de l'appendice A.3 de [52] que nous allons maintenant rappeler et généraliser légèrement.

**8.1.2.** — Soit donc  $X = [M/P]$  comme ci-dessus. On va écrire  $X$  pour le groupoïde  $X(\bar{k})$ ,  $M$  pour l'ensemble  $M(\bar{k})$  et  $P$  pour le groupe  $P(\bar{k})$ . Par définition l'ensemble des objets de  $X = [M/P]$  est l'ensemble  $M$ . Soit  $m_1, m_2 \in M$ . Alors l'ensemble des flèches  $\text{Hom}_X(m_1, m_2)$  est le transporteur

$$\text{Hom}_X(m_1, m_2) = \{p \in P \mid pm_1 = m_2\}.$$

La règle de composition des flèches se déduit de la multiplication dans le groupe  $P$ .

**8.1.3.** — L'action de l'élément de Frobenius  $\sigma \in \text{Gal}(\bar{k}/k)$  sur  $M$  et  $P$  induit une action sur le groupoïde  $X = [M/P]$ . Le groupoïde  $X(k)$  des points fixes sous l'action de  $\sigma$  est par définition la catégorie dont

- les objets sont les couples  $(m, p)$  où  $m \in M$  et  $p \in P$  tels que  $p\sigma(m) = m$  ;
- une flèche  $h : (m, p) \rightarrow (m', p')$  dans  $X(k)$  est un élément  $h \in P$  tel que  $hm = m'$  et  $p' = hp\sigma(h)^{-1}$ .

La catégorie  $X(k)$  a un nombre fini de classes d'isomorphisme d'objets et chaque objet a un nombre fini d'automorphismes. On s'intéresse à la somme

$$\sharp X(k) = \sum_{x \in X(k)/\sim} \frac{1}{\sharp \text{Aut}_{X(k)}(x)}$$

où  $x$  parcourt un ensemble de représentants des classes d'isomorphisme des objets de  $X(k)$ .

**8.1.4.** — Soit  $X = [M/P]$  comme ci-dessus et soit  $x = (m, p)$  un objet de  $X(k)$ . Par définition des flèches dans  $X(k)$ , la classe de  $\sigma$ -conjugaison de  $p$  ne dépend que de la classe d'isomorphisme de  $x$ . Puisque  $P$  est un  $k$ -groupe de type fini, le groupe des classes de  $\sigma$ -conjugaison de  $P$  s'identifie canoniquement à  $H^1(k, P)$ . Notons  $\text{cl}(x) \in H^1(k, P)$  la classe de  $\sigma$ -conjugaison de  $p$  qui ne dépend que de la classe d'isomorphisme de  $x$ . D'après un théorème de Lang,  $H^1(k, P)$  s'identifie à  $H^1(k, \pi_0(P))$  où  $\pi_0(P)$  désigne le groupe des composantes connexes de  $P \otimes_k \bar{k}$  qui est

donc un groupe fini commutatif muni d'une action de  $\sigma$ . Ainsi, pour tout caractère  $\sigma$ -invariant  $\kappa : \pi_0(P) \rightarrow \overline{\mathbb{Q}_\ell}^\times$ , pour tout objet  $x \in X(k)$ , on peut définir un accouplement

$$\langle \text{cl}(x), \kappa \rangle = \kappa(\text{cl}(x)) \in \overline{\mathbb{Q}_\ell}^\times$$

qui ne dépend que de la classe d'isomorphisme de  $x$ . On peut donc définir le nombre de points de  $X(k)$  avec la  $\kappa$ -pondération

$$\# X(k)_\kappa = \sum_{x \in X(k)/\sim} \frac{\langle \text{cl}(x), \kappa \rangle}{\# \text{Aut}_{X(k)}(x)}$$

où  $x$  parcourt un ensemble de représentants des classes d'isomorphisme des objets de  $X(k)$ .

**8.1.5.** — Le groupe  $P$  agit sur les groupes de cohomologie  $H_c^n(M)$  à travers son groupe des composantes connexes  $\pi_0(P)$  d'après le lemme d'homotopie. On peut former le sous-espace propre  $H_c^n(M)_\kappa$  de  $H_c^n(M)$  de valeur propre  $\kappa$ . Puisque  $\kappa$  est  $\sigma$ -invariant,  $\sigma$  agit sur  $H_c^n(M)_\kappa$ .

On a la variante suivante de la formule des traces de Grothendieck-Lefschetz démontrée dans l'appendice A.3 de [52].

**Proposition 8.1.6.** — Soient  $M$  un  $k$ -schéma de type fini,  $P$  un  $k$ -groupe de type fini agissant sur  $M$  et  $X = [M/P]$ . Alors la catégorie  $X(k)$  a un nombre fini de classes d'isomorphisme d'objets et chaque objet a un nombre fini d'automorphismes. Pour tout  $\kappa : \pi_0(P) \rightarrow \overline{\mathbb{Q}_\ell}^\times$  un caractère  $\sigma$ -invariant, le nombre  $\# X(k)_\kappa$  a l'interprétation cohomologique suivante :

$$\# P^0(k) \# X(k)_\kappa = \sum_n (-1)^n \text{tr}(\sigma, H_c^n(M)_\kappa)$$

où  $P^0$  la composante neutre de  $P$ .

Nous envoyons à [52, A.3.1] pour la démonstration. On peut considérer deux exemples instructifs qui expliquent pourquoi il faut séparer le rôle de  $P^0$  de  $\pi_0(P)$ .

**Exemple 8.1.7.** — Supposons que  $M = \text{Spec}(k)$  et que  $P$  est un groupe fini sur lequel  $\sigma$  agit. Soit  $X = [M/P]$  le classifiant de  $P$ . Alors

les objets de la catégorie  $X(k)$  sont les éléments  $p \in P$  alors que les flèches  $p \rightarrow p'$  sont les éléments  $h \in P$  tels que  $p' = hp\sigma(h)^{-1}$ . On a alors

$$\sharp X(k) = \frac{\sharp P}{\sharp P} = 1.$$

Par ailleurs, pour tout caractère  $\sigma$ -invariant  $\kappa : P \rightarrow \overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times$  non trivial, on a  $\sharp X(k)_\kappa = 0$ .

**Exemple 8.1.8.** — Si  $M = \text{Spec}(k)$  et  $P = \mathbb{G}_m$ . Soit  $X = [M/P]$  le classifiant de  $\mathbb{G}_m$ . Les objets de  $X(k)$  sont de nouveau les éléments  $p \in P$  alors que les flèches  $p \rightarrow p'$  sont les éléments  $h \in P$  tels que  $p' = hp\sigma(h)^{-1}$ . D'après Lang, tous les éléments de  $\bar{k}^\times$  sont  $\sigma$ -conjugués de sorte qu'il n'y a qu'une seule classe d'isomorphisme d'objets dans  $X(k)$ . Le groupe des automorphisme de chaque objet de  $X(k)$  est  $k^\times$  et a donc  $q - 1$  éléments. On a donc  $\sharp X(k) = (q - 1)^{-1}$ .

Pour étudier le comptage des points dans les fibres de Springer affines, nous avons besoin d'une variante de la discussion précédente pour le cas où  $M$  et  $P$  sont localement de type fini et où  $[M/P]$  a une propriété de finitude raisonnable.

Soient  $M$  un  $k$ -schéma localement de type fini et  $P$  un  $k$ -groupe commutatif localement de type fini agissant sur  $M$ . Pour que le quotient  $[M/P]$  soit raisonnablement fini, nous faisons en plus les hypothèses suivantes.

**Hypothèse 8.1.9.** — (1) Le groupe des composantes connexes  $\pi_0(P)$  est un groupe abélien de type fini.

(2) Le stabilisateur dans  $P$  de chaque point de  $M$  est un sous-groupe de type fini.

(3) Il existe un sous-groupe discret sans torsion  $\Lambda \subset P$  tel que  $P/\Lambda$  et  $M/\Lambda$  sont de type fini.

La dernière hypothèse nécessite d'être commentée. Puisque le groupe  $\Lambda$  est sans torsion, il agit sans points fixes sur  $M$  puisque les stabilisateurs dans  $P$  de n'importe quel point de  $M$  est de type fini et en particulier ont une intersection triviale avec  $\Lambda$ . De plus, si l'hypothèse est vérifiée, elle est vérifiée pour n'importe quel sous-group  $\Lambda' \subset \Lambda$  d'indice finie et  $\sigma$ -invariant.

**8.1.10.** — Il faut aussi expliquer comment construire un sous-groupe discret sans torsion  $\Lambda$  de  $P$  tel que  $P/\Lambda$  soit de type fini. Le groupe  $P$

admet un dévissage canonique

$$1 \rightarrow P^{\text{tf}} \rightarrow P \rightarrow \pi_0(P)^{\text{lib}} \rightarrow 0$$

où  $\pi_0(P)^{\text{lib}}$  est le quotient libre maximal de  $\pi_0(P)$  et où  $P^{\text{tf}}$  est le sous-groupe de type fini maximal de  $P$ . Puisque  $\pi_0(P)^{\text{lib}}$  est un groupe abélien libre, il existe un relèvement

$$\gamma : \pi_0(P)^{\text{lib}} \rightarrow P$$

qui n'est pas nécessairement  $\sigma$ -équivariant. Puisque  $P^{\text{tf}}$  est un  $k$ -groupe de type fini, la restriction de  $\gamma$  à  $\Lambda = N\pi_0(P)^{\text{lib}}$  pour  $N$  assez divisible est  $\sigma$ -équivariant. On obtient ainsi un sous-groupe discret sans torsion  $P$ . L'hypothèse (3) est équivalente à ce que le quotient de  $M$  par ce sous-groupe discret sans torsion est un  $k$ -schéma de type fini.

**8.1.11.** — Considérons le quotient  $X = [M/P]$ . Le groupoïde  $X(k)$  des points fixes sous  $\sigma$  a pour objet les couples  $x = (m, p)$  avec  $m \in M$  et  $p \in P$  tels que  $p\sigma(m) = m$ . Une flèche  $h : (m, p) \rightarrow (m', p')$  est un élément  $h \in P$  tel que  $hm = m'$  et  $p' = hp\sigma(h)^{-1}$ . Soit  $P_\sigma$  le groupe des classes de  $\sigma$ -conjugaison dans  $P$ . La classe de  $\sigma$ -conjugaison de  $p$  définit un élément  $\text{cl}(x) \in P_\sigma$  qui ne dépend que de la classe d'isomorphisme de  $x$ . Puisque  $m$  est défini sur une extension finie de  $k$ ,  $\text{cl}(x)$  appartient au sous-groupe

$$\text{cl}(x) \in H^1(k, P)$$

qui est la partie torsion de  $P_\sigma$ .

**Lemme 8.1.12.** — *Tout caractère  $\kappa : H^1(k, P) \rightarrow \overline{\mathbb{Q}_\ell}^\times$  peut s'étendre en un caractère d'ordre fini  $\tilde{\kappa} : P_\sigma \rightarrow \overline{\mathbb{Q}_\ell}^\times$ .*

*Démonstration.* — Soit  $P^0$  le groupe des composantes neutres de  $P$ . D'après le théorème de Lang, tout élément de  $P^0$  est  $\sigma$ -conjugué à l'unité. Il s'en suit que l'application  $P_\sigma \rightarrow \pi_0(P)_\sigma$  de  $P_\sigma$  sur le groupe des classes de  $\sigma$ -conjugaison de  $\pi_0(P)$  est un isomorphisme. Les caractères  $\tilde{\kappa} : P_\sigma \rightarrow \overline{\mathbb{Q}_\ell}^\times$  sont donc les  $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$ -points du  $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$ -groupe diagonalisable de type fini  $(\pi_0(P)_\sigma)^* = \text{Spec}(\overline{\mathbb{Q}_\ell}[\pi_0(P)_\sigma])$ . Les caractères  $\kappa : H^1(k, P) \rightarrow \overline{\mathbb{Q}_\ell}^\times$  forment le groupe  $\pi_0((\pi_0(P)_\sigma)^*)$  des composantes connexes de  $(\pi_0(P)_\sigma)^*$ . Tout élément  $\kappa \in \pi_0((\pi_0(P)_\sigma)^*)$  peut se relever en un élément de torsion  $\tilde{\kappa} \in (\pi_0(P)_\sigma)^*$ .  $\square$

Le quotient  $X = [M/P]$  est clairement équivalent à  $[(M/\Lambda)/(P/\Lambda)]$  où  $M/\Lambda$  et  $P/\Lambda$  sont de type fini. En particulier, l'ensemble des classes d'isomorphisme des objets de  $X(k)$  est fini et le groupe des automorphismes de chaque objet est fini. Pour tout caractère  $\kappa : H^1(k, P) \rightarrow \overline{\mathbb{Q}_\ell}^\times$ , on peut donc former la somme finie

$$\sharp X(k)_\kappa = \sum_{x \in X(k)/\sim} \frac{\langle \text{cl}(x), \kappa \rangle}{\sharp \text{Aut}(x)}.$$

Soit  $\tilde{\kappa} : P \rightarrow \overline{\mathbb{Q}_\ell}^\times$  un caractère  $\sigma$ -invariant d'ordre fini qui représente  $\kappa$ . On peut alors choisir un sous-groupe discret  $\Lambda \subset P$  tel que la condition (3) de 8.1.9 soit vérifiée et telle que la restriction  $\kappa$  à  $\Lambda$  est triviale. Notons encore par  $\tilde{\kappa}$  le caractère de  $P/\Lambda$  qui s'en déduit. Notons  $H_c^n(M/\Lambda)_{\tilde{\kappa}}$  le sous-espace propre de  $H_c^n(M/\Lambda)$  de valeur propre  $\tilde{\kappa}$ . L'énoncé suivant est un corollaire immédiat de 8.1.6.

**Proposition 8.1.13.** — *On a la formule*

$$\sharp P^0(k) \sharp X(k)_\kappa = \sum_n (-1)^n \text{tr}(\sigma, H_c^n(M/\Lambda)_{\tilde{\kappa}}).$$

De plus, si  $\Lambda' \subset \Lambda$  est un sous-groupe de rang maximal et  $\sigma$ -invariant alors on a un isomorphisme canonique

$$H_c^n(M/\Lambda')_{\tilde{\kappa}} \rightarrow H_c^n(M/\Lambda)_{\tilde{\kappa}}$$

pour chaque entier  $n$ .

*Démonstration.* — Notons  $\Lambda$  est un sous-groupe sans torsion de  $P$  de sorte que l'intersection de  $\Lambda$  avec la composante neutre  $P^0$  est triviale. Par conséquent, l'homomorphisme  $P^0 \rightarrow P/\Lambda$  induit un isomorphisme de  $P^0$  sur la composante neutre de  $P/\Lambda$ . En comparant avec 8.1.6, on obtient la formule qu'on voulait.  $\square$

En pratique, cette proposition est utile pour comparer et pour contrôler la variation de la somme  $\sharp X(k')_\kappa$  quand on prend les points à valeurs dans une extension finie  $k'$  de  $k$  variable. Soit  $m = \deg(k'/k)$ . Pour toute classe d'isomorphisme  $x'$  de  $X(k')$ , on a une classe de  $\sigma^m$ -conjugaison dans  $P$ . Puisque  $\kappa : P \rightarrow \overline{\mathbb{Q}_\ell}^\times$  est  $\sigma$ -invariant, il est à plus forte raison  $\sigma^m$ -invariant de sorte qu'on peut définir l'accouplement  $\langle \text{cl}(x), \kappa \rangle \in \overline{\mathbb{Q}_\ell}^\times$ . On a alors la formule

$$\sharp P^0(k') \sharp X(k')_\kappa = \sum_n (-1)^n \text{tr}(\sigma^m, H_c^n(M/\Lambda)_{\tilde{\kappa}}).$$



**Corollaire 8.1.14.** — Soit  $X = [M/P]$  et  $X' = [M'/P']$  comme ci-dessus. Soient  $\kappa : P \rightarrow \overline{\mathbb{Q}_\ell}^\times$  et  $\kappa' : P' \rightarrow \overline{\mathbb{Q}_\ell}^\times$  deux caractères  $\sigma$ -invariants d'ordre fini. Supposons qu'il existe un entier  $m$  tel que pour toute extension  $k'/k$  de degré  $m' \geq m$ , on a

$$\sharp P^0(k') \sharp X(k')_\kappa = \sharp P^0(k') \sharp X'(k')_{\kappa'}.$$

Alors, on a l'égalité

$$\sharp P^0(k) \sharp X(k)_\kappa = \sharp P^0(k) \sharp X'(k)_{\kappa'}.$$

Nous allons maintenant étudier deux exemples jumeaux qui sont parmi les fibres de Springer affines les plus simples. Dans ces cas, on peut calculer directement les nombres  $\sharp X(k)_\kappa$ .

**Exemple 8.1.15.** — Soient  $A$  un tore déployé de dimension un sur  $k$  et  $\mathbb{X}_*(A)$  son groupe des cocaractères. Considérons une extension

$$1 \rightarrow A \rightarrow P \rightarrow \mathbb{X}_*(A) \rightarrow 1.$$

Le faisceau  $\underline{\mathrm{RHom}}(\mathbb{X}_*(A), A)$  est concentré en degré 0 avec

$$\mathrm{Hom}(\mathbb{X}_*(A), A) = \mathbb{G}_m.$$

Puisque  $H^1(k, \mathbb{G}_m) = 0$ , on peut scinder la suite exacte ci-dessus et en particulier, il existe un isomorphisme

$$P \simeq A \times \mathbb{X}_*(A).$$

Dans les deux cas, on a un isomorphisme  $P = \mathbb{G}_m \times \mathbb{Z}$  sur  $\bar{k}$ .

Considérons la chaîne infinie de  $\mathbb{P}^1$  obtenue à partir de la réunion disjoints  $\bigsqcup_i \mathbb{P}_i^n$  où  $\mathbb{P}_i^n$  désigne la  $i$ -ème copie de  $\mathbb{P}^1$ , en recollant le point infini  $\infty_i$  de  $\mathbb{P}_i^1$  avec le point zéro  $0_{i+1}$  de  $\mathbb{P}_{i+1}^1$ . Le groupe  $\mathbb{G}_m \times \mathbb{Z}$  agit sur  $\bigsqcup_i \mathbb{P}_i^n$  de façon compatible avec le recollement de sorte qu'il agit encore sur la chaîne.

Considérons un  $k$ -schéma  $M$  muni d'une action de  $P$  tel qu'après le changement de base à  $\bar{k}$ ,  $M$  est isomorphe à la chaîne infinie de  $\mathbb{P}^1$  muni de l'action de  $\mathbb{G}_m \times \mathbb{Z}$  comme ci-dessus. On a en particulier une stratification  $M = M_1 \sqcup M_0$  où  $M_1$  est un torseur sous  $P$  et où  $M_0$  est un torseur sous le groupe discret  $\mathbb{X}_*(A)$ . Le groupoïde  $X = [M/P]$  a essentiellement deux objets  $x_1$  et  $x_0$  avec  $\mathrm{Aut}(x_1) = A$  et  $\mathrm{Aut}(x_0)$  trivial. On a aussi deux classes de cohomologie

$$\mathrm{cl}_1, \mathrm{cl}_0 \in H^1(k, P) = H^1(k, \mathbb{X}_*(A)).$$

Il y a exactement trois possibilités pour ces classes.

(1) Si  $A = \mathbb{G}_m$  alors  $\mathbb{X}_*(A) = \mathbb{Z}$ . Dans ce cas, on a l'annulation de  $H^1(k, \mathbb{X}_*(A))$ . On a alors la formule

$$\sharp X(k) = 1 + \frac{1}{q-1} = \frac{q}{q-1}$$

qu'il est plus agréable de retenir sous la forme

$$\sharp A(k) \sharp X(k) = q.$$

(2) Si  $A$  est le tore de dimension un non déployé sur  $k$  ayant donc  $q+1$  points à valeurs dans  $k$ . Dans ce cas  $\mathbb{X}_*(A)$  est le groupe  $\mathbb{Z}$  muni de l'action de  $\sigma$  donnée par  $m \mapsto -m$ . Dans ce cas, le groupe  $H^1(k, \mathbb{X}_*(A))$  a deux éléments et ses éléments peuvent être décrits explicitement comme suit. Un  $\mathbb{X}_*(A)$ -torseur  $E$  est un espace principal homogène  $E$  sous  $\mathbb{Z}$  muni d'une application  $\sigma : E \rightarrow E$  compatible avec l'action de  $\sigma$  sur  $\mathbb{Z}$  donnée ci-dessus. Pour tout  $e \in E$ , la différence  $\sigma(e) - e$  est un entier dont la parité est indépendante du choix de  $e$ . Si  $\sigma(e) - e$  est pair,  $\text{cl}(E)$  est l'élément trivial de  $H^1(k, \mathbb{X}_*(A))$ . Si  $\sigma(e) - e$  est impair,  $\text{cl}(E)$  est l'élément non trivial de  $H^1(k, \mathbb{X}_*(A))$ .

Supposons maintenant que  $\text{cl}_1 = 0$ . Alors, il existe exactement une copie  $\mathbb{P}_i^1$  dans la chaîne infinie stable sous  $\sigma$ . Puisque  $A$  est le tore non-déployé,  $\sigma$  échange nécessairement  $0_i$  et  $\infty_i$ . Il s'ensuit que  $\text{cl}_0 \neq 0$ .

Si  $\kappa : H^1(k, \mathbb{X}_*(A)) \rightarrow \overline{\mathbb{Q}_\ell}^\times$  est le caractère non-trivial, on a alors la formule

$$\sharp X(k)_\kappa = 1 - \frac{1}{q+1} = \frac{q}{q+1}$$

qu'il est plus agréable de retenir sous la forme

$$\sharp A(k) \sharp X(k)_\kappa = q.$$

(3) Supposons toujours que  $A$  est le tore non-déployé mais considérons le cas où  $\text{cl}_1 \neq 0$ . Il existe alors deux copies  $\mathbb{P}_i^1$  et  $\mathbb{P}_{i+1}^1$  échangées par  $\sigma$  de sorte que dans la chaîne infinie  $M$ , le point commun  $\infty_i = 0_{i+1}$  est  $\sigma$ -invariant. Il en résulte que  $\text{cl}_1 = 0$ . On a alors la formule

$$\sharp A(k) \sharp X(k)_\kappa = -q$$

où  $\kappa : H^1(k, \mathbb{X}_*(A)) \rightarrow \overline{\mathbb{Q}_\ell}^\times$  est le caractère non-trivial.

En supposant que  $M_1$  un  $k$ -point, on a  $\text{cl}_1 = 0$  de sorte que la troisième possibilité est exclue. Avec cette hypothèse, on constate que la formule

$$\sharp A(k) \sharp X(k)_\kappa = q$$

est alors valide.

**8.2. Comptage dans une fibre de Springer affine.** — Dans ce paragraphe, nous étudions le comptage de points dans une fibre de Springer en suivant essentiellement [24, §15] affine mais avec le langage développé dans le paragraphe précédent. Comme dans le paragraphe précédent, la notation  $x \in X$  signifiera  $x \in X(\bar{k})$ . Lorsqu'il s'agit de coefficients autres que  $\bar{k}$ , on le précisera.

Soit  $v \in |X|$  un point fermé de  $X$ . Soient  $F_v$  la complétion du corps des fractions rationnelles  $F$  par la topologie  $v$ -adique et  $\mathcal{O}_v$  l'anneau des entiers de  $F_v$ ,  $k_v$  le corps résiduel. On note  $X_v = \text{Spec}(\mathcal{O}_v)$  et  $X_v^\bullet = \text{Spec}(F_v)$ . Soit  $\bar{F}_v$  la complétion  $v$ -adique de  $\bar{F} = F \otimes_k \bar{k}$ . Soit  $\bar{\mathcal{O}}_v$  l'anneau des entiers de  $\bar{F}_v$ .

**8.2.1.** — Soit  $a \in \mathfrak{c}^\vee(\mathcal{O}_v)$  un  $X_v$ -point de  $\mathfrak{c}$  dont la fibre générique est semi-simple et régulière. La fibre de Springer affine réduite  $\mathcal{M}_v^{\text{red}}(a)$  est un  $k$ -schéma localement de type fini dont l'ensemble des  $\bar{k}$ -points est

$$\mathcal{M}_v^{\text{red}}(a) = \{g \in G(\bar{F}_v)/G(\bar{\mathcal{O}}_v) \mid \text{ad}(g)^{-1}\gamma_0 \in \mathfrak{g}(\bar{\mathcal{O}}_v)\}$$

où  $\gamma_0 = \epsilon(a)$  est la section de Kostant au point  $a$ . Puisque que les nilpotents ne jouent aucun rôle dans la discussion qui va suivre, on va écrire simplement  $\mathcal{M}_v(a)$  à la place de  $\mathcal{M}_v^{\text{red}}(a)$ .

**8.2.2.** — Soit  $J_a = a^*J$  l'image inverse du centralisateur régulier. Soit  $J'_a$  un  $X_v$ -schéma en groupes lisse de fibres connexes muni d'un homomorphisme  $J'_a \rightarrow J_a$  qui induit un isomorphisme sur la fibre générique. En particulier,  $J'_a$  peut être le schéma en groupes  $J_a^0$  des composantes neutres de  $J_a$  mais il sera plus souple pour les applications de considérer  $J'_a$  général.

**8.2.3.** — Considérons le  $k$ -schéma en groupes localement de type fini  $\mathcal{P}_v^{\text{red}}(J'_a)$  dont l'ensemble des  $\bar{k}$ -points est

$$\mathcal{P}_v^{\text{red}}(J'_a) = J_a(\bar{F}_v)/J'_a(\bar{\mathcal{O}}_v).$$

De nouveau, on va écrire simplement  $\mathcal{P}_v(J'_a)$  pour  $\mathcal{P}_v^{\text{red}}(J'_a)$  car les nilpotents ne jouent pas de rôle dans la discussion qui suit. L'homomorphisme  $J'_a \rightarrow J_a$  induit un homomorphisme

$$\mathcal{P}_v(J'_a) \rightarrow \mathcal{P}_v(J_a)$$

qui induit une action de  $\mathcal{P}_v(J'_a)$  sur  $\mathcal{M}_v(a)$ . D'après 3.4.1, cette action vérifie l'hypothèse 8.1.9 de sorte qu'on peut envisager le nombre de  $k$ -points du quotient  $[\mathcal{M}_v(a)/\mathcal{P}_v(J'_a)]$  ainsi que la variante avec une  $\kappa$ -pondération. D'après 8.1.13, on sait que ce sont des nombres finis qui

ont une interprétation cohomologique. Dans ce paragraphe, nous nous intéressons à la question d'exprimer ces nombres en termes d'intégrales orbitales stables et de  $\kappa$ -intégrales orbitales.

Commençons par comparer les  $\kappa$  qui apparaissent dans le problème de comptage 8.1 et ceux qui apparaissent dans la définition des  $\kappa$ -intégrales orbitales 1.7.

**Lemme 8.2.4.** — *Supposons que la fibre spéciale de  $J'_a$  est connexe. Il existe un isomorphisme canonique*

$$H^1(F_v, J_a) = H^1(k, \mathcal{P}_v(J'_a)).$$

*Démonstration.* — D'après un théorème de Steinberg,  $H^1(\bar{F}_v, J_a) = 0$ . Il s'ensuit que

$$H^1(F_v, J_a) = H^1(\text{Gal}(\bar{k}/k), J_a(\bar{F}_v)).$$

D'après un théorème de Lang, on a l'annulation  $H^1(k, J'_a(\bar{\mathcal{O}}_v)) = 0$  car  $J'_a$  est un schéma en groupes lisse de fibres connexes. Le lemme s'en déduit.  $\square$

**Proposition 8.2.5.** — *Supposons la fibre spéciale de  $J'_a$  connexe. Soit  $\kappa : H^1(F_v, J_a) \rightarrow \overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times$  un caractère et  $\kappa : H^1(k, \mathcal{P}_v(J'_a)) \rightarrow \overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times$  le caractère qui s'en déduit. Le nombre de  $k$ -points avec la  $\kappa$ -pondération de  $[\mathcal{M}_v(a)/\mathcal{P}_v(J'_a)]$  peut alors s'exprimer comme suit*

$$\sharp[\mathcal{M}_v(a)/\mathcal{P}_v(J'_a)](k)_\kappa = \text{vol}(J'_a(\mathcal{O}_v), dt_v) \mathbf{O}_a^\kappa(1_{\mathfrak{g}_v}, dt_v).$$

où  $1_{\mathfrak{g}_v}$  est la fonction caractéristique de  $\mathfrak{g}(\mathcal{O}_v)$  et où  $dt_v$  est n'importe quelle mesure de Haar de  $J_a(F_v)$ .

*Démonstration.* — Rappelons la description de la catégorie

$$[\mathcal{M}_v(a)/\mathcal{P}_v(J'_a)](k).$$

Un objet de cette catégorie consiste en un couple  $x = (m, p)$  formé d'un élément  $m \in \mathcal{M}_v(a)$  et d'un élément  $p \in \mathcal{P}_v(J'_a)$  tels qu'on ait l'égalité  $p\sigma(m) = m$ . Une flèche de  $(m, p)$  dans  $(m', p')$  dans cette catégorie consiste en un élément  $h \in \mathcal{P}_v(J'_a)$  tel que  $m' = hm$  et  $p' = hp\sigma(h)^{-1}$ .

Notons  $\mathcal{P}_v(J'_a)_\sigma$  le groupe des classes de  $\sigma$ -conjugaison de  $\mathcal{P}_v(J'_a)$  et  $H^1(k, \mathcal{P}_v(J'_a))$  le sous-groupe des cocycles continus. Pour chaque objet  $x = (m, p)$  comme ci-dessus, on définit  $\text{cl}(x) \in \mathcal{P}_v(J'_a)_\sigma$  la classe de  $\sigma$ -conjugaison de  $p$  qui appartient en fait au sous-groupe

$$\text{cl}(x) \in H^1(k, \mathcal{P}_v(J'_a)) = H^1(F_v, J_a).$$

Soit  $\gamma_0$  l'image de  $a$  dans  $\mathfrak{g}$  par la section de Kostant. On a un isomorphisme canonique  $J_a = I_{\gamma_0}$  cf. 1.4.3 si bien que  $\text{cl}(x)$  peut aussi être vu comme un élément de  $H^1(F_v, I_{\gamma_0})$ .

**Lemme 8.2.6.** — *Pour tout objet  $x$  de  $[\mathcal{M}_v(a)/\mathcal{P}_v(J'_a)](k)$ , la classe  $\text{cl}(x)$  appartient au noyau de l'homomorphisme*

$$H^1(F_v, I_{\gamma_0}) \rightarrow H^1(F_v, G).$$

*Démonstration.* — Soit  $x = (p, m)$  comme ci-dessus. Soient  $g \in G(\bar{F}_v)$  un représentant de  $m \in G(\bar{F}_v)/G(\bar{\mathcal{O}}_v)$  et  $j \in I_{\gamma_0}(\bar{F}_v)$  un représentant de  $p$ . L'égalité  $p\sigma(m) = m$  implique que

$$g^{-1}j\sigma(g) \in G(\bar{\mathcal{O}}_v)$$

si bien que cet élément est  $\sigma$ -conjugué à l'élément neutre dans  $G(\bar{F}_v)$ . Ainsi  $\text{cl}(x) \in H^1(F_v, I_{\gamma_0})$  a une image triviale dans  $H^1(F_v, G)$ .  $\square$

Continuons la démonstration de 8.2.5. Pour tout élément  $\xi$  dans le noyau de  $H^1(F_v, I_{\gamma_0}) \rightarrow H^1(F_v, G)$ , considérons la sous-catégorie

$$[\mathcal{M}_v(a)/\mathcal{P}_v(J'_a)]_{\xi}(k)$$

des objets de  $[\mathcal{M}_v(a)/\mathcal{P}_v(J'_a)](k)$  tels que  $\text{cl}(x) = \xi$ . Nous nous proposons d'écrire le nombre de classes d'isomorphisme de  $[\mathcal{M}_v(a)/\mathcal{P}_v(J'_a)]_{\xi}(k)$  comme une intégrale orbitale.

Fixons  $j_{\xi} \in I_{\gamma_0}(\bar{F}_v)$  dans la classe de  $\sigma$ -conjugaison  $\xi$ . Soit  $(m, p)$  un objet de  $[\mathcal{M}_v(a)/\mathcal{P}_v(J'_a)]_{\xi}(k)$ . Puisque  $p$  est  $\sigma$ -conjugué à  $j_{\xi}$  dans  $\mathcal{P}_v(J'_a)$ , il existe  $h \in \mathcal{P}_v(J'_a)$  tel que  $j_{\xi} = h^{-1}p\sigma(h)$ . Alors  $(m, p)$  est isomorphe à  $(h^{-1}m, j_{\xi})$ . Par conséquent, la catégorie  $[\mathcal{M}_v(a)/\mathcal{P}_v(J'_a)]_{\xi}(k)$  est équivalente à la sous-catégorie pleine formée des objets de la forme  $(m, j_{\xi})$ . Une flèche  $(m, j_{\xi}) \rightarrow (m', j_{\xi})$  est un élément  $h \in \mathcal{P}_v(J'_a)(k)$  tel que  $hm = m'$ . Puisque  $J'_a$  a des fibres connexes, on a

$$\mathcal{P}_v(J'_a)(k) = J_a(F_v)/J'_a(\bar{\mathcal{O}}_v).$$

Soit  $(m, j_{\xi})$  comme ci-dessus. Choisissons un représentant  $g \in G(\bar{F}_v)$  de  $m$ . On a alors  $g^{-1}j_{\xi}\sigma(g) \in G(\bar{\mathcal{O}}_v)$ . Comme tous les éléments de  $G(\bar{\mathcal{O}}_v)$  sont  $\sigma$ -conjugués à l'élément neutre, on peut choisir  $g$  avec  $m = gG(\bar{\mathcal{O}}_v)$  tel que

$$g^{-1}j_{\xi}\sigma(g) = 1.$$

Soient  $g, g' \in G(\bar{F}_v)$  deux éléments vérifiant l'équation ci-dessus et représentant la même classe  $m \in G(\bar{F}_v)/G(\bar{\mathcal{O}}_v)$ . Alors  $g' = gk$  avec  $k \in$

$G(\mathcal{O}_v)$  si bien que l'image de  $g$  dans  $G(\bar{F}_v)/G(\mathcal{O}_v)$  est bien déterminée par  $(m, j_\xi)$ .

Ainsi la catégorie  $[\mathcal{M}_v(a)/\mathcal{P}_v(J'_a)]_\xi(k)$  est équivalente à la catégorie  $O_\xi$  dont les objets sont les éléments  $g \in G(\bar{F}_v)/G(\mathcal{O}_v)$  vérifiant deux équations

- (1)  $g^{-1}j_\xi\sigma(g) = 1$
- (2)  $\text{ad}(g)^{-1}\gamma_0 \in \mathfrak{g}(\bar{\mathcal{O}}_v)$

et dont les flèches  $g \rightarrow g_1$  sont les éléments  $h \in J_a(F_v)/J'_a(\mathcal{O}_v)$  tel que  $g = hg_1$ . Ici, pour faire agir  $h$  à gauche, on a utilisé l'isomorphisme canonique  $J_a = I_{\gamma_0}$ .

Puisque l'image de  $\xi$  dans  $H^1(F_v, G)$  est triviale, il existe  $g_\xi \in G(\bar{F}_v)$  tel que  $g_\xi^{-1}j_\xi\sigma(g_\xi) = 1$ . Fixons un tel  $G_\xi$  et posons

$$\gamma_\xi = \text{ad}(g_\xi)^{-1}\gamma_0.$$

L'équation  $g_\xi^{-1}j_\xi\sigma(g_\xi) = 1$  implique que  $\gamma_\xi \in G(F_v)$ . La classe de  $G(F_v)$ -conjugaison de  $\gamma_\xi$  ne dépend pas des choix de  $j_\xi$  et  $g_\xi$  mais seulement de la classe  $\xi \in H^1(F_v, I_{\gamma_0})$ .

En posant  $g' = g_\xi^{-1}g$ , la catégorie  $O_\xi$  peut être décrite comme suit. Ses objets sont les éléments  $g' \in G(F_v)/G(\mathcal{O}_v)$  vérifiant

$$\text{ad}(g')^{-1}(\gamma_\xi) \in \mathfrak{g}(\mathcal{O}_v).$$

Ses flèches  $g' \rightarrow g'_1$  sont les éléments  $h \in J_a(F_v)/J'_a(\mathcal{O}_v)$  tel que  $g' = hg'_1$ . Ici, pour faire agir  $h$  à gauche, on a utilisé l'isomorphisme canonique  $J_a = I_{\gamma_\xi}$  où  $I_{\gamma_\xi}$  est le centralisateur de  $\gamma_\xi$ .

L'ensemble des classes d'isomorphisme de  $O_\xi$  est donc l'ensemble des double-classes

$$g' \in I_{\gamma_\xi}(F_v) \backslash G(F_v) / G(\mathcal{O}_v)$$

telles que  $\text{ad}(g')^{-1}\gamma_\xi \in \mathfrak{g}(\mathcal{O}_v)$ . Le groupe des automorphismes de  $g'$  est le groupe

$$(I_{\gamma_\xi}(F_v) \cap g'G(\mathcal{O}_v)g'^{-1}) / J'_a(\mathcal{O}_v)$$

dont le cardinal peut être exprimé en termes de volumes comme suit

$$\frac{\text{vol}(I_{\gamma_\xi}(F_v) \cap g'G(\mathcal{O}_v)g'^{-1}, dt_v)}{\text{vol}(J'_a(\mathcal{O}_v), dt_v)}.$$

On a donc

$$\# O_\xi = \sum \frac{\text{vol}(J'_a(\mathcal{O}_v), dt_v)}{\text{vol}(J_a(F_v) \cap g'G(\mathcal{O}_v)g'^{-1}, dt_v)}$$

la sommation étant étendue sur l'ensemble des doubles classes

$$g' \in I_{\gamma_\xi}(F_v) \backslash G(F_v) / G(\mathcal{O}_v)$$

telles que  $\text{ad}(g')^{-1}\gamma_\xi \in \mathfrak{g}(\mathcal{O}_v)$ . On obtient donc la formule

$$\sharp [\mathcal{M}_v(a) / \mathcal{P}_v(J_a)]_\xi(k) = \sharp O_\xi = \text{vol}(J'_a(\mathcal{O}_v), dt) \mathbf{O}_{\gamma_\xi}(1_{\mathfrak{g}_v}, dt_v).$$

En sommant sur le noyau de  $H^1(F, I_{\gamma_0}) \rightarrow H^1(F, G)$ , on obtient la formule

$$\sharp [\mathcal{M}_v(a) / \mathcal{P}_v(J'_a)](k)_\kappa = \text{vol}(J'_a(\mathcal{O}_v), dt_v) \mathbf{O}_a^\kappa(1_{\mathfrak{g}_v}, dt_v)$$

qu'on voulait.  $\square$

On voudra éventuellement le même type d'énoncé pour les schémas en groupes  $J'_a$  n'ayant pas nécessairement une fibre spéciale connexe et en particulier pour  $J_a$  lui-même. Le comptage direct du nombre de  $k$ -points du quotient  $[\mathcal{M}_v(a) / \mathcal{P}_v(J_a)]$  s'avère très pénible. Il est plus économique de passer par la comparaison avec le cas connexe. Nous allons énoncer le résultat seulement dans le cas de  $J_a$  bien qu'il est valide en général.

Soit  $\kappa : H^1(k, \mathcal{P}_v(J_a)) \rightarrow \overline{\mathbb{Q}_\ell}^\times$ . En utilisant l'homomorphisme

$$H^1(k, P_v(J_a^0)) \rightarrow H^1(k, \mathcal{P}_v(J_a)),$$

on obtient un caractère de  $H^1(k, \mathcal{P}_v(J_a^0))$  et par conséquent un caractère de  $H^1(F_v, J_a)$  que nous allons noter tous  $\kappa$ .

**Proposition 8.2.7.** — *Considérons  $\kappa$  un caractère de  $H^1(k, \mathcal{P}_v(J_a))$  et notons  $\kappa : H^1(F_v, J_a) \rightarrow \overline{\mathbb{Q}_\ell}^\times$  le caractère de  $H^1(F_v, J_a)$  qui s'en déduit. Alors, le nombre de  $k$ -points avec la  $\kappa$ -pondération de  $[\mathcal{M}_v(a) / \mathcal{P}_v(J_a)]$  peut s'exprimer comme suit*

$$\sharp [\mathcal{M}_v(a) / \mathcal{P}_v(J_a)](k)_\kappa = \text{vol}(J_a^0(\mathcal{O}_v), dt_v) \mathbf{O}_a^\kappa(1_{\mathfrak{g}_v}, dt_v).$$

où  $1_{\mathfrak{g}_v}$  est la fonction caractéristique de  $\mathfrak{g}(\mathcal{O}_v)$  et où  $dt_v$  est n'importe quelle mesure de Haar de  $J_a(F_v)$ .

De plus, si  $\kappa : H^1(F_v, J_a) \rightarrow \overline{\mathbb{Q}_\ell}^\times$  est un caractère qui ne provient pas d'un caractère de  $H^1(k, \mathcal{P}_v(J_a))$  alors la  $\kappa$ -intégrale orbitale  $\mathbf{O}_a^\kappa(1_{\mathfrak{g}_v}, dt_v)$  est nulle.

*Démonstration.* — Il s'agit d'une comparaison entre  $\mathcal{P}_v(J_a)$  et le cas connu  $\mathcal{P}_v(J_a^0)$ . Il suffit de démontrer l'égalité

$$\sharp [\mathcal{M}_v(a) / \mathcal{P}_v(J_a)](k)_\kappa = \sharp [\mathcal{M}_v(a) / \mathcal{P}_v(J_a^0)](k)_\kappa$$

dans le premier cas et l'annulation de  $[\mathcal{M}_v(a)/\mathcal{P}_v(J_a^0)](k)_\kappa$  dans le second cas. La démonstration sera fondée sur le même principe que 8.1.7 bien que les détails sont plus compliqués dans le cas présent.

On a une suite exacte

$$1 \rightarrow \pi_0(J_{a,v}) \rightarrow \mathcal{P}_v(J_a^0) \rightarrow \mathcal{P}_v(J_a) \rightarrow 1$$

où  $\pi_0(J_{a,v})$  est le groupe des composantes connexes de la fibre de  $J_a$  en  $v$ . On en déduit une suite exacte longue

$$(8.2.8) \quad 1 \rightarrow \pi_0(J_{a,v})^\sigma \rightarrow \mathcal{P}_v(J_a^0)^\sigma \rightarrow \mathcal{P}_v(J_a)^\sigma \rightarrow$$

$$(8.2.9) \quad \pi_0(J_{a,v})_\sigma \rightarrow \mathcal{P}_v(J_a^0)_\sigma \rightarrow \mathcal{P}_v(J_a)_\sigma \rightarrow 1$$

où l'exposant  $\sigma$  désigne un groupe des  $\sigma$ -invariants et l'indice  $\sigma$  désigne un groupe des  $\sigma$ -coinvariants.

Considérons le foncteur

$$\pi : [\mathcal{M}_v(J_a)/\mathcal{P}_v(J_a^0)](k) \rightarrow [\mathcal{M}_v(J_a)/\mathcal{P}_v(J_a)](k).$$

Il envoie un objet  $x' = (m, p')$  avec  $m \in \mathcal{M}_v(a)$  et  $p' \in \mathcal{P}_v(J_a^0)$  tel que  $p'\sigma(m) = m$  sur l'objet  $x = (m, p)$  où  $p$  est l'image de  $p'$  dans  $\mathcal{P}_v(J_a)$ . Choisissons un ensemble de représentants  $\{x_\psi \mid \psi \in \Psi\}$  des classes d'isomorphisme de  $[\mathcal{M}_v(J_a)/\mathcal{P}_v(J_a)](k)$ .

Puisque l'homomorphisme  $\mathcal{P}_v(J_a^0) \rightarrow \mathcal{P}_v(J_a)$  est surjectif, cette sous-catégorie de  $[\mathcal{M}_v(J_a)/\mathcal{P}_v(J_a^0)](k)$  est équivalente à  $[\mathcal{M}_v(J_a)/\mathcal{P}_v(J_a^0)](k)$  si bien que pour calculer les nombres  $\sharp [\mathcal{M}_v(J_a)/\mathcal{P}_v(J_a^0)](k)_\kappa$ , il est loisible de se restreindre à cette sous-catégorie.

Pour tout  $\psi \in \Psi$ , considérons la sous-catégorie pleine

$$[\mathcal{M}_v(J_a)/\mathcal{P}_v(J_a^0)](k)_{x_\psi}$$

de  $[\mathcal{M}_v(J_a)/\mathcal{P}_v(J_a^0)](k)$  formée des objets de la forme  $x'_\psi = (m_\psi, p'_\psi)$  avec  $p'_\psi \mapsto p_\psi$ . Si  $\psi \neq \psi'$ , deux objets  $x'_\psi \in [\mathcal{M}_v(J_a)/\mathcal{P}_v(J_a^0)](k)_{x_\psi}$  et  $x'_{\psi'} \in [\mathcal{M}_v(J_a)/\mathcal{P}_v(J_a^0)](k)_{x_{\psi'}}$  ne sont pas isomorphes. De plus pour tout  $x' \in [\mathcal{M}_v(J_a)/\mathcal{P}_v(J_a^0)](k)$  il existe  $\psi \in \Psi$  et  $x'_\psi \in [\mathcal{M}_v(J_a)/\mathcal{P}_v(J_a^0)](k)_{x_\psi}$  tels que  $x'$  et  $x'_\psi$  sont isomorphes. Ainsi, la réunion disjointe des catégories

$$\bigsqcup_{\psi} [\mathcal{M}_v(J_a)/\mathcal{P}_v(J_a^0)](k)_{x_\psi}$$

forment une sous-catégorie pleine de  $[\mathcal{M}_v(J_a)/\mathcal{P}_v(J_a^0)](k)$  qui lui est équivalente. Par conséquent, pour compter les objets de  $[\mathcal{M}_v(J_a)/\mathcal{P}_v(J_a^0)](k)$ , on peut compter dans chaque  $[\mathcal{M}_v(J_a)/\mathcal{P}_v(J_a^0)](k)_{x_\psi}$  et puis faire la somme sur les  $\psi \in \Psi$ .



Fixons un  $x_\psi$  et notons le simplement  $x = (m, p)$ . La catégorie

$$[\mathcal{M}_v(J_a)/\mathcal{P}_v(J_a^0)](k)_x$$

n'est pas difficile à décrire. En fixant un objet  $x_1 = (m, p_1)$  avec  $p_1 \mapsto p$ , on identifie l'ensemble des objets de cette catégorie avec le groupe  $\pi_0(J_{a,v})$  qui est le noyau de  $\mathcal{P}_v(J_a^0) \rightarrow \mathcal{P}_v(J_a)$ . Une flèche dans cette catégorie est donnée par un élément du groupe

$$H_1 = \{h_1 \in \mathcal{P}_v(J_a^0) \mid hm = m \text{ et } h_1\sigma(h_1)^{-1} \in \pi_0(J_{a,v})\}.$$

La catégorie  $[\mathcal{M}_v(J_a)/\mathcal{P}_v(J_a^0)]_x$  est équivalente à la catégorie quotient de l'ensemble  $\pi_0(J_{a,v})$  par l'action de  $H_1$  avec  $H_1$  agissant à travers l'homomorphisme  $\alpha : H_1 \rightarrow \pi_0(J_{a,v})$  défini par  $\alpha(h_1) = h_1\sigma(h_1)^{-1}$ . L'ensemble des classes d'isomorphisme de cette catégorie s'identifie avec le conoyau  $\text{cok}(\alpha)$  de  $\alpha$  et le groupe des automorphismes de chaque objet s'identifie avec le noyau  $\ker(\alpha)$ . Ceci montre en particulier que  $H_1$  est un groupe fini.

Soit  $\kappa$  un caractère de  $H^1(k, \mathcal{P}_v(J_a^0))$ . Ce groupe s'identifie canoniquement à la partie torsion de  $\mathcal{P}_v(J_a^0)_\sigma$ . Considérons la restriction de  $\kappa$  à  $\pi_0(J_{a,v})_\sigma$  et notons aussi  $\kappa$  le caractère  $\pi_0(J_{a,v}) \rightarrow \overline{\mathbb{Q}_\ell}^\times$  qui s'en déduit. Ce caractère est certainement triviale sur l'image de  $\alpha : H_1 \rightarrow \pi_0(J_{a,v})_\sigma$  si bien qu'il définit un cocaractère sur le conoyau  $\kappa : \text{cok}(\alpha) \rightarrow \overline{\mathbb{Q}_\ell}^\times$ . La somme

$$\sum_{x'} \frac{\langle \text{cl}(x'), \kappa \rangle}{\# \text{Aut}(x')} = 0$$

sur l'ensemble des classes d'isomorphisme de la sous-catégorie pleine  $[\mathcal{M}_v(J_a)/\mathcal{P}_v(J_a^0)]_x$  est alors égale à

$$\sum_{z \in \text{cok}(\alpha)} \frac{\langle z, \kappa \rangle}{\# \ker(\alpha)} \langle \text{cl}(x_1), \kappa \rangle.$$

Si la restriction de  $\kappa$  à  $\pi_0(J_{a,v})$  est non triviale alors cette somme est nulle ce qui entraîne l'annulation

$$[\mathcal{M}_v(a)/\mathcal{P}_v(J_a^0)](k)_\kappa = 0.$$

Supposons maintenant que la restriction de  $\kappa$  à  $\pi_0(J_{a,v})$  est triviale. Dans ce cas,  $\kappa$  se factorise par  $H^1(k, \mathcal{P}_v(J_a))$  et la somme ci-dessus est égale à

$$\frac{\# \text{cok}(\alpha)}{\# \ker(\alpha)} \langle \text{cl}(x), \kappa \rangle.$$

Il reste à calculer  $\sharp \operatorname{cok}(\alpha) / \sharp \operatorname{ker}(\alpha)$ . La suite exacte

$$1 \rightarrow \operatorname{ker}(\alpha) \rightarrow H_1 \rightarrow \pi_0(J_{a,v}) \rightarrow \operatorname{coker}(\alpha) \rightarrow 1$$

implique l'égalité

$$\frac{\sharp \operatorname{cok}(\alpha)}{\sharp \operatorname{ker}(\alpha)} = \frac{\sharp \pi_0(J_{a,v})}{\sharp H_1}.$$

Soient  $h_1 \in H_1$  et  $h$  son image dans  $\mathcal{P}_v(J_a)$ . On a alors  $h\sigma(h)^{-1} = 1$  de sorte que  $h \in \mathcal{P}_v(J_a)^\sigma$ . Soit  $\operatorname{stab}(m)$  le sous-groupe des éléments de  $\mathcal{P}_v(J_a)$  qui stabilisent  $m$ . On a alors la suite exacte

$$1 \rightarrow \pi_0(J_{a,v}) \rightarrow H_1 \rightarrow \mathcal{P}_v(J_a)^\sigma \cap \operatorname{stab}(m) \rightarrow 1$$

où  $\mathcal{P}_v(J_a)^\sigma \cap \operatorname{stab}(m)$  est exactement le groupe des automorphismes de  $\operatorname{Aut}(x)$  dans la catégorie  $[\mathcal{M}_v(J_a)/\mathcal{P}_v(J_a)]$ . On a donc l'égalité

$$\frac{\sharp \pi_0(J_{a,v})}{\sharp H_1} = \frac{1}{\sharp \operatorname{Aut}(x)}$$

qui implique l'égalité

$$\sharp [\mathcal{M}_v(a)/\mathcal{P}_v(J_a)](k)_\kappa = \sharp [\mathcal{M}_v(a)/\mathcal{P}_v(J_a^0)](k)_\kappa$$

qu'on voulait.  $\square$

En appliquant les résultats généraux de 8.1 à la situation présente, on obtient une interprétation cohomologique des intégrales orbitales stables et des  $\kappa$ -intégrales orbitales. Prenons un sous-groupe sans torsion  $\sigma$ -stable  $\Lambda$  de  $\mathcal{P}_v(J_a^0)$  comme dans 8.1.9. Ce sous-groupe existe en vertu de la discussions qui suit 8.1.9 et du résultat de Kazhdan-Lusztig cf. 3.4.1. On obtient le corollaire suivant de 8.1.13 et 8.2.5.

**Corollaire 8.2.10.** — *Soit  $\kappa$  un caractère de  $H^1(F_v, J_a)$ . Soit  $J_a^{b,0}$  la composante neutre du modèle de Néron de  $J_a$ . Pour tout  $\Lambda$  comme ci-dessus, on a l'égalité*

$$\sum_n (-1)^n \operatorname{tr}(\sigma, H^n([\mathcal{M}_v(a)/\Lambda])_\kappa) = \operatorname{vol}(J_a^{b,0}(\mathcal{O}_v), dt_v) \mathbf{O}_a^\kappa(1_{\mathfrak{g}_v}, dt_v).$$

*Démonstration.* — En mettant ensemble 8.1.13 et 8.2.5 on obtient la formule

$$\begin{aligned} & \sum_n (-1)^n \operatorname{tr}(\sigma, H^n([\mathcal{M}_v(a)/\Lambda])_\kappa) \\ &= (\sharp \mathcal{P}_v^0(J_a^0)(k)) \operatorname{vol}(J_a^0(\mathcal{O}_v), dt_v) \mathbf{O}_a^\kappa(1_{\mathfrak{g}_v}, dt_v). \end{aligned}$$

où  $\# \mathcal{P}_v^0(J_a^0)(k)$  est le nombre de  $k$ -points de la composante neutre de  $\mathcal{P}_v(J_a^0)$ . Si  $J_a^{b,0}$  est la composante neutre du modèle de Néron, on a un homomorphisme  $J_a^0 \rightarrow J_a^{b,0}$  qui induit une suite exacte

$$1 \rightarrow J_a^{b,0}(\bar{\mathcal{O}}_v)/J_a^0(\bar{\mathcal{O}}_v) \rightarrow \mathcal{P}_v(J_a^0) \rightarrow \mathcal{P}_v(J_a^{b,0}) \rightarrow 1$$

qui permet d'identifier la composante neutre  $\mathcal{P}_v^0(J_a^0)$  de  $\mathcal{P}_v(J_a^0)$  avec le  $k$ -groupe affine connexe dont les  $\bar{k}$ -points sont  $J_a^{b,0}(\bar{\mathcal{O}}_v)/J_a^0(\bar{\mathcal{O}}_v)$ . Puisque  $J_a^0$  et  $J_a^{b,0}$  sont des schémas en groupes de fibres connexes, on en déduit une suite exacte

$$1 \rightarrow J_a^0(\mathcal{O}_v) \rightarrow J_a^{b,0}(\mathcal{O}_v) \rightarrow \mathcal{P}_v^0(J_a^0)(k) \rightarrow 1$$

d'où l'égalité

$$(\# \mathcal{P}_v^0(J_a^0)(k)) \text{vol}(J_a^0(\mathcal{O}_v), dt_v) = \text{vol}(J_a^{b,0}(\mathcal{O}_v), dt_v)$$

pour n'importe quelle mesure de Haar  $dt_v$  sur  $J(F_v)$ . Le corollaire s'en déduit.  $\square$

**8.3. Un cas très simple.** — Soit  $v$  un point fermé de  $X$ . Notons  $k_v$  le corps résiduel de  $v$ . Choisissons un point géométrique  $\bar{v}$  au-dessus de  $v$ . Notons  $X_v = \text{Spec}(\mathcal{O}_v)$  la complétion de  $X$  en  $v$  et  $X_v^\bullet = \text{Spec}(F_v)$  où  $F_v$  est le corps des fractions de  $\mathcal{O}_v$ . Choisissons un uniformisant  $\epsilon_v$ . Dans ce paragraphe, nous notons  $G$  la restriction de  $G$  à  $X_v$  et  $G^\bullet$  la restriction de  $G$  à  $X_v^\bullet$ .

**8.3.1.** — Soit  $a \in \mathfrak{c}(\mathcal{O}_v)$  dont l'image dans  $\mathfrak{c}(F_v)$  est régulière et semi-simple. Soit  $d_v(a) = \deg_v(a^* \mathfrak{D}_G) \in \mathbb{N}$ . Nous allons supposer que

$$d_v(a) = 2 \text{ et } c_v(a) = 0.$$

D'après la formule de Bezrukavnikov *cf.* 3.7.5, la dimension de la fibre de Springer affine  $\mathcal{M}_v(a)$  est alors égale à un. On va montrer qu'au-dessus de  $\bar{k}$ , cette fibre de Springer affine est une réunion disjointe des copies de la chaîne infinie des droites projectives.

**8.3.2.** — Soit  $\gamma_0 = \epsilon(a) \in \mathfrak{g}(F_v)$  la section de Kostant appliquée à  $a$ . Son centralisateur  $T^\bullet = I_{\gamma_0}$  est un sous-tore maximal de  $G^\bullet$ . L'hypothèse  $c_v(a) = 0$  implique que  $T^\bullet$  est un sous-tore non ramifié c'est-à-dire qu'il s'étend en un sous-tore maximal  $T$  de  $G$ . Soit  $\Phi$  l'ensemble des racines de  $\bar{T} = T \otimes_{\mathcal{O}_v} \bar{\mathcal{O}}_{\bar{v}}$ . On a alors la fonction de valuation radicielles de Goresky, Kottwitz et MacPherson *cf.* [26]

$$r_a : \Phi \rightarrow \mathbb{N}$$

défini par  $r_a(\alpha) = \text{val}(\alpha(\gamma_0))$  où on a pris la valuation sur  $\bar{F}_{\bar{v}}$  qui étend la valuation sur  $F_v$ . On a alors

$$d_v(a) = \sum_{\alpha \in \Phi} r_{\alpha}(\gamma_0).$$

Il existe donc une unique paire de racines  $\pm\alpha$  tel que  $r_{\pm\alpha}(\gamma_0) = 1$  et  $r_{\alpha'}(\gamma_0) = 0$  pour toute racine  $\alpha' \notin \{\pm\alpha\}$ .

**8.3.3.** — Le groupe de Galois  $\text{Gal}(\bar{k}/k_v)$  agit sur  $\Phi$  en laissant invariant la fonction  $r_a(\alpha)$  de sorte qu'il laisse stable le couple  $\{\pm\alpha\}$ . Soit  $\bar{G}_{\pm\alpha}$  le sous-groupe de  $\bar{G} = G \otimes_{\mathcal{O}_v} \bar{\mathcal{O}}_{\bar{v}}$  engendré par  $\bar{T}$  et par les sous-groupes radiciels  $U_{\alpha}$  et  $U_{-\alpha}$ . L'action du groupe de Galois de  $\text{Gal}(\bar{k}/k_v)$  sur  $\bar{T}$  laissant stable  $\{\pm\alpha\}$  permet de descendre  $\bar{G}_{\pm\alpha}$  en un sous-schéma en groupes réductifs  $G_{\pm\alpha}$  de  $G_{\mathcal{O}_v}$ . Le centre  $Z_{\pm\alpha}$  de  $G_{\pm\alpha}$  qui s'identifie au noyau de  $\alpha : T \rightarrow \mathbb{G}_m$  est aussi défini sur  $\mathcal{O}_v$ . Soit  $A_{\pm\alpha} = T/Z_{\pm\alpha}$ ; c'est un tore de dimension un sur  $X_v$ .

**Proposition 8.3.4.** — *On a un homomorphisme canonique  $J_a \rightarrow T$  dont l'image au niveau des  $\bar{\mathcal{O}}_{\bar{v}}$ -points est le noyau de l'homomorphisme composé de la réduction modulo l'idéal maximal  $T(\bar{\mathcal{O}}_{\bar{v}}) \rightarrow T(\bar{k})$  et la racine  $\alpha : T(\bar{k}) \rightarrow \mathbb{G}_m(\bar{k})$ .*

On en déduit la description suivante de  $\mathcal{P}_v(J_a)$ .

**Corollaire 8.3.5.** — *On a une suite exacte de groupes abéliens avec l'action d'endomorphisme de Frobenius  $\sigma$*

$$1 \rightarrow A_{\pm\alpha}(\bar{k}) \rightarrow \mathcal{P}_{\bar{v}}(J_a)(\bar{k}) \rightarrow \mathbb{X}_*(T) \rightarrow 1$$

où  $\mathbb{X}_*(T)$  est le groupe des cocaractères du tore  $T$  au-dessus de  $\bar{\mathcal{O}}_{\bar{v}}$ .

*Démonstration.* — On déduit de la suite exacte

$$1 \rightarrow J_a(\bar{\mathcal{O}}_{\bar{v}}) \rightarrow T(\bar{\mathcal{O}}_{\bar{v}}) \rightarrow A_{\pm\alpha}(\bar{k}) \rightarrow 1$$

la suite exacte

$$1 \rightarrow A_{\pm\alpha}(\bar{k}) \rightarrow J_a(\bar{F}_{\bar{v}})/J_a(\bar{\mathcal{O}}_{\bar{v}}) \rightarrow T(\bar{F}_{\bar{v}})/T(\bar{\mathcal{O}}_{\bar{v}}) \rightarrow 1.$$

On a par ailleurs un isomorphisme

$$T(\bar{F}_{\bar{v}})/T(\bar{\mathcal{O}}_{\bar{v}}) = \mathbb{X}_*(T)$$

qui se déduit de l'homomorphisme  $\mathbb{X}_*(T) \rightarrow T(\bar{F}_{\bar{v}})$  défini par  $\lambda \mapsto \epsilon_v^\lambda$  d'où le corollaire.  $\square$

**Lemme 8.3.6.** — *Les  $\bar{k}$ -points de la fibre de Springer affine*

$$\mathcal{M}_{\bar{v}}(a)(\bar{k}) = \{g \in G(\bar{F}_{\bar{v}})/G(\bar{\mathcal{O}}_{\bar{v}}) \mid \text{ad}(g)^{-1}(\gamma_0) \in \mathfrak{g}(\bar{\mathcal{O}}_{\bar{v}})\}$$

*s'écrivent de façon unique sous la forme*

$$g = \epsilon_v^\lambda U_\alpha(x\epsilon_v^{-1})$$

*avec  $\lambda \in \mathbb{X}_*(T)$  et  $x \in \bar{k}$ .*

*Démonstration.* — Avec la décomposition d'Iwasawa, pour tout élément  $g \in G(\bar{F}_{\bar{v}})/G(\bar{\mathcal{O}}_{\bar{v}})$ , il existe uniques  $\lambda \in \mathbb{X}_*(T)$  et  $u \in U(\bar{F}_{\bar{v}})/U(\bar{\mathcal{O}}_{\bar{v}})$  tels que

$$g = \epsilon_v^\lambda u.$$

Comme  $T_{\bar{v}}$  commute avec  $\gamma_0$ , le plongement

$$\mathcal{M}_{\bar{v}}(a) \rightarrow \mathcal{G}_{\bar{v}} = G(\bar{F}_{\bar{v}})/G(\bar{\mathcal{O}}_{\bar{v}})$$

est  $T_{\bar{v}}$ -équivariant. L'action de  $T_{\bar{v}}$  sur  $\mathcal{M}_{\bar{v}}(a)$  se factorise par

$$T_{\bar{v}} \rightarrow T(\bar{F}_{\bar{v}}) \rightarrow \mathcal{P}_v(J_a) = T(\bar{F}_{\bar{v}})/J_a(\bar{\mathcal{O}}_{\bar{v}})$$

de sorte qu'il se factorise par le tore de dimension un

$$T_{\bar{v}} \rightarrow A_{\pm\alpha, \bar{v}}.$$

Il s'ensuit que si on écrit  $g \in \mathcal{M}_{\bar{v}}(a)(\bar{k})$  sous la forme  $g = \epsilon_v^\lambda u$ ,  $u$  doit être de la forme  $u = U_\alpha(y)$  avec  $y \in \bar{F}_{\bar{v}}/\bar{\mathcal{O}}_{\bar{v}}$  uniquement déterminé. Un calcul dans  $\text{SL}_2$  cf. [24, lemme 6.2] montre alors qu'avec l'hypothèse  $r_{\pm\alpha}(a) = 1$ ,  $y$  s'écrit uniquement sous la forme  $y = x\epsilon_v^{-1}$  avec  $x \in \bar{k}$  et inversement les éléments  $g$  de la forme  $g = \epsilon_v^\lambda U_\alpha(x\epsilon_v^{-1})$  appartiennent à  $\mathcal{M}_{\bar{v}}(a)(\bar{k})$ .  $\square$

**Lemme 8.3.7.** — *Les points fixes du tore de dimension un  $A_{\pm\alpha, \bar{v}}$  dans  $\mathcal{M}_{\bar{v}}$  sont  $\epsilon_v^\lambda$ . Pour  $\lambda \in \mathbb{X}_*(T)$  fixé,  $A_{\pm\alpha, \bar{v}}$  agit simplement transitivement sur*

$$O_\lambda = \{\epsilon_v^\lambda U_\alpha(x\epsilon_v^{-1}) \in \mathcal{M}_{\bar{v}}(a)(\bar{k}) \mid x \in \bar{k}^\times\}.$$

*De plus le bord de l'adhérence de cette orbite est constitué de  $\epsilon_v^\lambda$  et  $\epsilon_v^{\lambda-\alpha^\vee}$  où  $\alpha^\vee$  est la coracine associée à la racine  $\alpha$ .*

*Démonstration.* — Un calcul direct montre que les  $\epsilon_v^\lambda$  sont fixes sous l'action de  $A_{\pm\alpha, \bar{v}}$  et que  $A_{\pm\alpha, \bar{v}}$  agit simplement transitivement sur  $O_\lambda$ . Ceci montre que l'ensemble des points fixes de  $A_{\pm\alpha, \bar{v}}$  est exactement  $\{\epsilon_v^\lambda \mid \lambda \in \mathbb{X}_*(T)\}$ . Quand  $x \rightarrow 0$ ,  $\epsilon_v^\lambda U_\alpha(x\epsilon_v^{-1})$  tend vers  $\epsilon_v^\lambda$  de sorte que  $\epsilon_v^\lambda$  appartient à l'adhérence de  $O_\lambda$ .

Il reste à démontrer que quand  $x \rightarrow \infty$ ,  $\epsilon_v^\lambda U_\alpha(x\epsilon_v^{-1})$  tend vers  $\epsilon_v^{\lambda-\alpha^\vee}$ . Il revient au même de démontrer que  $U_\alpha(x\epsilon_v^{-1})$  tend vers  $\epsilon_v^{-\alpha^\vee}$  quand

$x \rightarrow \infty$ . Il s'agit d'un calcul bien connu dans la Grassmannienne affine qui découle de la relation de Steinberg dans  $G(\bar{F}_{\bar{v}})$  cf. [73, chap. 3, lemme 19]

$$y^{-\alpha^\vee} w_\alpha = U_{-\alpha}(y) U_\alpha(-y^{-1}) U_\alpha(y)$$

qui vaut pour tout  $y \in \bar{F}_{\bar{v}}$ , pour toute racine  $\alpha$  et pour un représentant  $w_\alpha$  de la réflexion  $s_\alpha \in W$  attachée à la racine  $\alpha$  indépendant de  $y$  et qui en particulier appartient à  $G(\bar{k})$ . En prenant  $y = -x^{-1}\epsilon_v$  avec  $x \in \bar{k}^\times$ , on obtient la relation suivante dans  $G(\bar{F}_{\bar{v}})/G(\bar{\mathcal{O}}_{\bar{v}})$

$$U_\alpha(x\epsilon_v^{-1}) = \epsilon_v^{-\alpha^\vee} U_{-\alpha}(-x^{-1}\epsilon_v^{-1}).$$

En faisant tendre  $x$  vers  $\infty$ , on constate que  $U_\alpha(x\epsilon_v^{-1})$  tend vers  $\epsilon_v^{-\alpha^\vee}$ .  $\square$

**Proposition 8.3.8.** — Soit  $\kappa \in \hat{T}^\sigma$  un élément de torsion tel que

$$\kappa(\alpha^\vee) \neq 1.$$

Alors, on a la formule

$$[\mathcal{M}_v(a)/\mathcal{P}_v(J_a)](k)_\kappa = \sharp A_{\pm\alpha}(k_v)^{-1} q^{\deg(v)}.$$

*Démonstration.* — La fibre de Springer affine  $\mathcal{M}_v(a)$  s'obtient comme la restriction des scalaires  $k_v/k$  d'une fibre de Springer affine définie sur  $k_v$ . Il en est de même de  $\mathcal{P}_v(J_a)$  et du quotient  $[\mathcal{M}_v(a)/\mathcal{P}_v(J_a)]$ . On peut donc supposer que  $k_v = k$ .

Notons  $A = A_{\pm\alpha, v}$  qui est un tore de dimension un sur  $k$ . Considérons le sous-groupe  $\sigma$ -invariant de  $\mathbb{X}_*(T)$  engendré par  $\alpha^\vee$  et considérons l'image réciproque de la suite exacte

$$1 \rightarrow A \rightarrow \mathcal{P}_v(J_a) \rightarrow \mathbb{X}_*(T) \rightarrow 1$$

par l'homomorphisme  $\mathbb{Z}\alpha^\vee \rightarrow \mathbb{X}_*(T)$ . C'est un groupe algébrique  $P$  défini sur  $k$  muni d'une suite exacte

$$1 \rightarrow A \rightarrow P \rightarrow \mathbb{Z}\alpha^\vee \rightarrow 1$$

et un homomorphisme injectif  $P \rightarrow \mathcal{P}_v(J_a)$  qui induit l'identité sur la composante neutre  $A$ .

Dans la fibre de Springer affine  $\mathcal{M}_v(a)$ , on dispose d'un  $k$ -point  $m$  donné par la section de Kostant. D'après la description ci-dessus de  $\mathcal{M}_v(a) \otimes_k \bar{k}$ , la composante connexe  $M$  de  $\mathcal{M}_v(a) \otimes_k \bar{k}$  est une chaîne infinie de droites projectives munie d'une action de  $P \otimes_k \bar{k}$  qui est simplement transitive

sur la  $M^{\text{reg}}$ . Comme  $M$  contient le  $k$ -point  $m$ , il est défini sur  $k$ . On retrouve  $\mathcal{M}_v(J_a)$  à partir de  $M$  par l'induction de  $P$  dans  $\mathcal{P}_v(J_a)$

$$\mathcal{M}_v(a) = M \wedge^P \mathcal{P}_v(J_a).$$

En particulier, on a une équivalence de catégories

$$[\mathcal{M}_v(a)/\mathcal{P}_v(J_a)] = [M/P].$$

On se ramène donc à l'exercice de comptage de points déjà résolu dans l'exemple 8.1.15.  $\square$

**8.4. Comptage dans une fibre de Hitchin anisotrope.** — Rappelons le comptage de points dans une fibre de Hitchin  $\mathcal{M}_a$  avec  $a \in \mathcal{M}_a^{\text{ani}}(k)$  en suivant le paragraphe 9 de [55]. Dans *loc. cit.*, nous avons considéré le quotient de  $\mathcal{M}_a$  par  $\mathcal{P}_a$ . Il est en fait plus commode et pas plus onéreux de considérer un quotient plus général.

**8.4.1.** — Soit  $J'_a$  un  $X$ -schéma en groupes lisse commutatif de type fini muni d'un homomorphisme  $J'_a \rightarrow J_a$  qui est un isomorphisme sur un ouvert non-vide  $U$  de  $X$ . La donnée de  $J'_a$  est équivalente à la donnée des sous-groupes ouverts compacts  $J'_a(\mathcal{O}_v) \subset J_a(\mathcal{O}_v)$  pour les points  $v \in |X - U|$ . Notons  $\mathcal{P}'_a = \mathcal{P}(J'_a)$  le classifiant des  $J'_a$ -torseurs sur  $X$ . On a alors un homomorphisme  $\mathcal{P}'_a \rightarrow \mathcal{P}_a$  qui induit une action de  $\mathcal{P}'_a$  sur  $\mathcal{M}_a$ . Pour  $J'_a$  assez petit au sens où les sous-groupes ouverts compacts  $J'_a(\mathcal{O}_v)$  soient assez petit,  $H^0(\bar{X}, J'_a)$  est trivial et de sorte que  $\mathcal{P}'_a$  est représentable par un groupe algébrique localement de type fini sur  $k$ . Pour le comptage, il sera commode de supposer que les fibres de  $J'_a$  sont toutes connexes. Considérons la catégorie quotient  $[\mathcal{M}_a/\mathcal{P}'_a]$ .

Le comptage des  $k$ -points de  $\mathcal{M}_a$  est fondé sur la forme suivante de la formule de produit cf. 4.13.1 et [55, théorème 4.6].

**Proposition 8.4.2.** — Soit  $U = a^{-1}(\mathfrak{c}_D^{\text{rs}})$  l'image inverse du lieu semi-simple régulier de  $\mathfrak{c}_D$ . On a une équivalence de catégories

$$[\mathcal{M}_a/\mathcal{P}'_a] = \prod_{v \in |X-U|} [\mathcal{M}_v(a)/\mathcal{P}_v(J'_a)]$$

compatible à l'action de  $\sigma \in \text{Gal}(\bar{k}/k)$ . En particulier, on a une équivalence entre les catégories des  $k$ -points

$$[\mathcal{M}_a/\mathcal{P}'_a](k) = \prod_{v \in |X-U|} [\mathcal{M}_v(a)/\mathcal{P}_v(J'_a)](k).$$

Soit  $(\mathcal{P}'_a)^0$  la composante neutre de  $\mathcal{P}'_a$ . Puisque  $a \in \mathcal{A}^{\text{ani}}(k)$ , le groupe des composantes connexes  $\pi_0(\mathcal{P}_a)$  est un groupe fini muni d'une action de l'élément de Frobenius  $\sigma \in \text{Gal}(\bar{k}/k)$ .

**Proposition 8.4.3.** — *Supposons que les fibres de  $J'_a$  sont connexes. Pour tout caractère  $\sigma$ -invariant de  $\pi_0(\mathcal{P}_a)$*

$$\kappa : \pi_0(\mathcal{P}_a)_\sigma \rightarrow \overline{\mathbb{Q}_\ell}^\times,$$

on a

$$\# [\mathcal{M}_a/\mathcal{P}'_a](k)_\kappa = \prod_{v \in |X-U|} \# [\mathcal{M}_v(a)/\mathcal{P}_v(J'_a)](k)_\kappa.$$

*Démonstration.* — Pour tout point fermé  $v$  de  $X$  dans le complémentaire de l'ouvert  $U = a^{-a}(\mathfrak{c}_D^{\text{rs}})$ , l'homomorphisme composé

$$\mathcal{P}_v(J'_a) \rightarrow \mathcal{P}'_a \rightarrow \pi_0(\mathcal{P}'_a)$$

se factorise par  $\pi_0(\mathcal{P}_v(J'_a))$ . L'homomorphisme  $\kappa : \pi_0(\mathcal{P}'_a)_\sigma \rightarrow \overline{\mathbb{Q}_\ell}^\times$  définit donc un homomorphisme  $\kappa : \pi_0(\mathcal{P}_v(J'_a))_\sigma \rightarrow \overline{\mathbb{Q}_\ell}^\times$ .

Dans 8.4.2, si un point  $y \in [\mathcal{M}_a/\mathcal{P}'_a](k)$  correspond à une collection de points  $y_v \in [\mathcal{M}_v(a)/\mathcal{P}_v(J'_a)](k)$  pour  $v \in |X-U|$ , alors on a la formule

$$\langle \text{cl}(y), \kappa \rangle = \prod_{v \in |X-U|} \langle \text{cl}(y_v), \kappa \rangle.$$

Par conséquent, on a la factorisation

$$\# [\mathcal{M}_a/\mathcal{P}'_a](k)_\kappa = \prod_{v \in |X-U|} \# [\mathcal{M}_v(a)/\mathcal{P}_v(J'_a)](k)_\kappa$$

d'où la proposition. □

La conjonction avec 8.1.6 donne le corollaire suivant.

**Corollaire 8.4.4.** — *Pour tout caractère  $\kappa : \pi_0(\mathcal{P}_a)_\sigma \rightarrow \overline{\mathbb{Q}_\ell}^\times$ , on a*

$$\sum_n (-1)^n \text{tr}(\sigma, H^n(\mathcal{M}_a)_\kappa) = \# (\mathcal{P}'_a)^0(k) \prod_{v \in |X-U|} \# [\mathcal{M}_v(a)/\mathcal{P}_v(J'_a)](k)_\kappa$$

où  $H^n(\mathcal{M}_a)_\kappa$  est le sous-espace propre de  $H^n(\mathcal{M}_a)$  où le groupe  $\pi_0(\mathcal{P}_a)$  agit à travers le caractère  $\kappa$ .

**8.4.5.** — Pour exprimer les nombres  $\# [\mathcal{M}_v(a)/\mathcal{P}_v(J'_a)](k)_\kappa$  en termes d'intégrales orbitales locales, faisons les choix suivants :



- en toute place  $v \in |X - U|$ , choisissons une trivialisation du fibré inversible  $D'|_{X_v}$ ,
- en toute place  $v \in |X - U|$ , choisissons une mesure de Haar  $dt_v$  du tore  $J_a(F_v)$ .

Ces choix nous permettent :

- d'identifier la restriction de  $a$  à  $X_v$  avec un élément  $a_v \in \mathfrak{c}(\mathcal{O}_v) \cap \mathfrak{c}^{\text{rs}}(F_v)$ ,
- d'identifier les schémas en groupes  $J_a$  et  $J_{a_v}$  ce qui munit une mesure de Haar  $dt_v$  à  $J_{a_v}(F_v)$ ,
- d'identifier la fibre de Springer affine  $\mathcal{M}_v(a)$  munie de l'action de  $\mathcal{P}_v(J_a)$  avec la fibre de Springer affine  $\mathcal{M}_v(a_v)$  munie de l'action de  $\mathcal{P}_v(J_{a_v})$ .

Avec ces choix faits, on peut exprimer les nombres  $\sharp[\mathcal{M}_v(a)/\mathcal{P}_v(J'_a)](k)_\kappa$  en termes de  $\kappa$ -intégrales orbitales *cf.* 8.2.5

$$\sharp[\mathcal{M}_v(a)/\mathcal{P}_v(J'_a)](k)_\kappa = \text{vol}(J'_a(\mathcal{O}_v), dt_v) \mathbf{O}_{a_v}^\kappa(1_{\mathfrak{g}_v}, dt_v).$$

On obtient alors la formule

$$\sum_n (-1)^n \text{tr}(\sigma, H^n(\mathcal{M}_a)_\kappa) = (\mathcal{P}'_a)^0(k) \prod_{v \in |X - U|} \text{vol}(J'_a(\mathcal{O}_v), dt_v) \mathbf{O}_{a_v}^\kappa(1_{\mathfrak{g}_v}, dt_v).$$

**8.5. Stabilisation sur  $\tilde{\mathcal{A}}_H^{\text{ani}} - \tilde{\mathcal{A}}_H^{\text{bad}}$ .** — On est en position de démontrer le théorème 6.4.3 sur l'ouvert  $\tilde{\mathcal{A}}_H^{\text{good}} = \tilde{\mathcal{A}}_H^{\text{ani}} - \tilde{\mathcal{A}}_H^{\text{bad}}$ . Ici  $\tilde{\mathcal{A}}_H^{\text{bad}}$  est le sous-schéma fermé de  $\tilde{\mathcal{A}}_H^{\text{ani}}$  défini dans 7.6.4.

*Démonstration.* — D'après le théorème du support 7.6.6, sur  $\tilde{\mathcal{A}}_H^{\text{good}}$ , les faisceaux pervers purs

$$K_\kappa^n = \tilde{\nu}^* {}^p H^n(\tilde{f}_*^{\text{ani}} \overline{\mathbb{Q}}_\ell)_\kappa \text{ et } K_{H, \text{st}}^n = {}^p H^{n+2r_H^G(D)}(\tilde{f}_{H,*}^{\text{ani}} \overline{\mathbb{Q}}_\ell)_{\text{st}}(-r_H^G(D))$$

sont les prolongement de leurs restrictions à n'importe quel ouvert non-vide  $\tilde{\mathcal{U}}$  de  $\tilde{\mathcal{A}}_H^{\text{good}}$ . Pour démontrer que  $K^n$  et  $K_H^n$  sont isomorphes sur  $\tilde{\mathcal{A}}_H^{\text{good}} \otimes_k \bar{k}$  et sont isomorphes après semi-simplification sur  $\tilde{\mathcal{A}}_H^{\text{good}}$ , il suffit de le faire sur n'importe quel ouvert dense  $\tilde{\mathcal{U}}$  de  $\tilde{\mathcal{A}}_H^{\text{good}}$ . On va construire un bon ouvert  $\tilde{\mathcal{U}}$  comme suit.

Rappelons qu'on a une égalité de diviseurs *cf.* 1.10.3

$$\nu^* \mathfrak{D}_{G,D} = \mathfrak{D}_{H,D} + 2\mathfrak{R}_{H,D}^G$$

sur  $\mathfrak{c}_{H,D}$ . De plus, on sait que  $\mathfrak{D}_{H,D}$  et  $\mathfrak{R}_{H,D}^G$  sont des diviseurs réduits de  $\mathfrak{c}_{H,D}$  étrangers de sorte que la réunion

$$\mathfrak{D}_{H,D} + \mathfrak{R}_{H,D}^G$$

est aussi un diviseur réduit.

**Lemme 8.5.1.** — *Supposons que  $\deg(D) > 2g$ . Alors, l'ensemble des  $a_H \in \mathcal{A}_H(\bar{k})$  tel que  $a_H(\tilde{X})$  coupe transversalement  $\mathfrak{D}_{H,D} + \mathfrak{R}_{H,D}^G$  forme un ouvert non vide  $\mathcal{U}$  de  $\mathcal{A}_H$ .*

*Démonstration.* — La démonstration est identique à la démonstration de 4.6.1.  $\square$

**8.5.2.** — Considérons l'image réciproque  $\tilde{\mathcal{U}}$  de  $\mathcal{U}$  dans  $\tilde{\mathcal{A}}$ . En rapetissant cet ouvert si nécessaire, on peut supposer que  $\tilde{\mathcal{U}} \subset \tilde{\mathcal{A}}^{\text{good}}$ . En le rapetissant encore si nécessaire, on peut supposer que pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ , les restrictions

$$L_\kappa^n = K_\kappa^n|_{\tilde{\mathcal{U}}} \text{ et } L_{H,\text{st}}^n = K_{H,\text{st}}^n|_{\tilde{\mathcal{U}}}$$

sont des systèmes locaux purs de poids  $n$  sur  $\tilde{\mathcal{U}}$ .

**8.5.3.** — Il suffit en fait de démontrer que pour toute extension finie  $k'$  de  $k$ , pour tout  $k'$ -point  $\tilde{a}_H \in \tilde{\mathcal{U}}(k')$  d'image  $\tilde{a} \in \tilde{\mathcal{A}}(k')$ , on a l'égalité des traces

$$(8.5.4) \quad \sum_n (-1)^n \text{tr}(\sigma_{k'}, (L_\kappa^n)_{\tilde{a}}) = \sum_n (-1)^n \text{tr}(\sigma_{k'}, (L_{H,\text{st}}^n)_{\tilde{a}_H}).$$

En effet, on a alors l'égalité

$$\sum_n (-1)^n \text{tr}(\sigma_{k'}^j, (L_\kappa^n)_{\tilde{a}}) = \sum_n (-1)^n \text{tr}(\sigma_{k'}^j, (L_{H,\text{st}}^n)_{\tilde{a}_H}).$$

pour tout entier naturel  $j$  en considérant  $\tilde{a}_H$  comme un point à valeurs dans l'extension de degré  $j$  de  $k'$ . De plus, comme les valeurs propres de  $\sigma_{k'}$  dans  $(L_\kappa^n)_{\tilde{a}}$  et  $(L_{H,\text{st}}^n)_{\tilde{a}_H}$  sont toutes de valeur absolue  $q^{n \deg(k'/k)/2}$ , ces égalités impliquent que pour toute extension finie  $k'$  de  $k$ , pour tout  $\tilde{a}_H \in \tilde{\mathcal{U}}(k')$  d'image  $\tilde{a} \in \tilde{\mathcal{A}}$  et pour tout  $n$ , on a

$$\text{tr}(\sigma_{k'}, (L_\kappa^n)_{\tilde{a}}) = \text{tr}(\sigma_{k'}, (L_{H,\text{st}}^n)_{\tilde{a}_H}).$$

D'après le théorème de Chebotarev, ceci implique que  $L_\kappa^n$  et  $L_{H,\text{st}}^n$  sont isomorphes après la semi-simplification.

**8.5.5.** — Démontrons maintenant la formule (8.5.4). Pour tout point  $\tilde{a}_H \in \tilde{\mathcal{U}}(k')$ , on peut calculer directement les deux membres de cette formule et ensuite les comparer. En remplaçant  $k$  par  $k'$  et  $X$  par  $X \otimes_k k'$ , on peut supposer que  $\tilde{a}_H$  est un  $k$ -point de  $\tilde{\mathcal{U}}$ .

**8.5.6.** — Soit  $a_H \in \mathcal{A}_H(k)$  l'image de  $\tilde{a}_H$ . Soit  $a$  l'image de  $a_H$  dans  $\mathcal{A}(k)$ . D'après 2.5.1, on a un homomorphisme canonique

$$J_a \rightarrow J_{H,a_H}$$

qui est un isomorphisme au-dessus de l'ouvert  $U = a^{-1}(\mathfrak{c}_D^{\text{rs}})$ . Choisissons un schéma en groupes  $J'_a$  lisse commutatif de fibres connexes muni d'un homomorphisme  $J'_a \rightarrow J_a$  qui est génériquement un isomorphisme. Soit  $\mathcal{P}'_a$  le champ classifiant des  $J'_a$ -torseurs sur  $X$ . En rapetissant  $J'_a$  si nécessaire, on peut supposer que  $H^0(\tilde{X}, J'_a)$  trivial dans quel cas  $\mathcal{P}'_a$  est un groupe algébrique de type fini. On a des homomorphismes naturels  $\mathcal{P}'_a \rightarrow \mathcal{P}_a$  et  $\mathcal{P}'_a \rightarrow \mathcal{P}_{H,a_H}$  qui induit une action de  $\mathcal{P}'_a$  sur  $\mathcal{M}_a$  et  $\mathcal{M}_{H,a_H}$ . On peut calculer les deux membres dans la formule 8.5.4 en considérant les quotients  $[\mathcal{M}_a/\mathcal{P}'_a]$  et  $[\mathcal{M}_{H,a_H}/\mathcal{P}'_a]$ . D'après 8.4.4, le membre de gauche de 8.5.4 vaut

$$(\mathcal{P}'_a)^0(k) \prod_{v \in |X-U|} \# [\mathcal{M}_v(a)/\mathcal{P}_v(J'_a)](k)_\kappa$$

alors que le membre de droite vaut

$$q^{r_H^G(D)} (\mathcal{P}'_a)^0(k) \prod_{v \in |X-U|} \# [\mathcal{M}_{H,v}(a)/\mathcal{P}_v(J'_a)](k).$$

Comme

$$r_H^G(D) = \sum_v \deg(v) r_{H,v}^G(a_H)$$

où  $r_{H,v}^G(a_H)$  est le degré du diviseur  $a_H^* \mathfrak{R}_{H,D}^G$  en  $v$ , il suffit de démontrer l'énoncé suivant qui est un cas particulièrement simple du lemme fondamental de Langlands-Shelstad 1.11.1. Notons que ce cas particulier du lemme fondamental est essentiellement contenu dans l'article [46] de Labesse et Langlands sur  $\text{SL}(2)$  et a été repris d'un point de vue plus géométrique dans [24] par Goresky, Kottwitz et MacPherson.  $\square$

**Lemme 8.5.7.** — Soit  $\tilde{a}_H \in \tilde{\mathcal{A}}_H(k)$ . Soit  $v$  un place de  $X$  au-dessus duquel  $a_H(\tilde{X}_v)$  ne coupe pas ou coupe transversalement le diviseur  $\mathfrak{D}_{H,D} + \mathfrak{R}_{H,D}^G$ . On a l'égalité entre les nombres

$$\# [\mathcal{M}_v(a)/\mathcal{P}_v(J'_a)](k)_\kappa = q^{\deg(v) r_{H,v}^G(a_H)} \# [\mathcal{M}_{H,v}(a)/\mathcal{P}_v(J'_a)](k)$$

qui sont des nombres non nuls.

*Démonstration.* — Soit  $\bar{v}$  un point géométrique au-dessus de  $v$ . Comme  $a_H(\bar{X}_v)$  coupe transversalement  $\mathfrak{D}_{H,D} + \mathfrak{R}_{H,D}^G$ , il y a trois possibilités pour les entiers  $d_{H,\bar{v}}(a_H)$ ,  $d_{\bar{v}}(a)$  et  $r_{H,v}^G(a_H)$  :

(1) si  $a_H(\bar{v}) \notin \mathfrak{D}_{H,D} \cup \mathfrak{R}_{H,D}^G$ , alors

$$d_{H,\bar{v}}(a_H) = 0, d_{\bar{v}}(a) = 0 \text{ et } r_{H,v}^G(a_H) = 0,$$

(2) si  $a_H(\bar{v}) \in \mathfrak{D}_{H,D}$  alors  $a_H(\bar{v}) \notin \mathfrak{R}_{H,D}^G$  et on a

$$d_{H,\bar{v}}(a_H) = 1, d_{\bar{v}}(a) = 1 \text{ et } r_{H,v}^G(a_H) = 0,$$

(3) si  $a_H(\bar{v}) \in \mathfrak{R}_{H,D}^G$  alors  $a_H(\bar{v}) \notin \mathfrak{D}_{H,D}$  et on a

$$d_{H,\bar{v}}(a_H) = 0, d_{\bar{v}}(a) = 2 \text{ et } r_{H,v}^G(a_H) = 1.$$

**8.5.8.** — Dans les deux premiers cas, la formule de Bezrukavnikov 3.7.5 montre que  $\delta_{H,\bar{v}}(a_H) = \delta_{\bar{v}}(a) = 0$  de sorte que les fibres de Springer affines  $\mathcal{M}_{H,v}(a_H)$  et  $\mathcal{M}_v(a)$  sont toutes les deux de dimension zéro. Il s'ensuit que  $\mathcal{P}_v(J_a)$  agit simplement transitivement sur  $\mathcal{M}_v(a)$  et  $\mathcal{P}_v(J_{H,a_H})$  agit simplement transitivement sur  $\mathcal{M}_{H,v}(a_H)$  cf. 3.7.2. Choisissons une trivialisations de  $D'$  au-dessus de  $X_v$  comme dans 8.4.5 pour pouvoir écrire agréablement les intégrales orbitales. En particulier  $a_H$  et  $a$  définissent des éléments  $a_{H,v} \in \mathfrak{c}_H(\mathcal{O}_v)$  et  $a_v \in \mathfrak{c}(\mathcal{O}_v)$ . En conjonction avec 8.2.7, on en déduit la formule

$$1 = [\mathcal{M}_{H,v}(a_H)/\mathcal{P}_v(J_{H,a_H})](k) = \text{vol}(J_{H,a_H}^0(\mathcal{O}_v), dt_v) \mathbf{SO}_{a_{H,v}}(1_{\mathfrak{h}_v}, dt_v)$$

En comparant avec la formule 8.2.5

$$\sharp [\mathcal{M}_{H,v}(a)/\mathcal{P}_v(J'_a)](k) = \text{vol}(J'_a(\mathcal{O}_v), dt_v) \mathbf{SO}_{a_{H,v}}(1_{\mathfrak{h}_v}, dt_v)$$

on obtient

$$\sharp [\mathcal{M}_{H,v}(a)/\mathcal{P}_v(J'_a)](k) = \frac{\text{vol}(J'_a(\mathcal{O}_v), dt_v)}{\text{vol}(J_{H,a_H}^0(\mathcal{O}_v), dt_v)}.$$

En remarquant que  $\mathcal{M}_v(a)$  est donné avec un  $k$ -point par la section de Kostant, on a aussi

$$\sharp [\mathcal{M}_v(a)/\mathcal{P}_v(J_a)](k)_\kappa = 1.$$

Le même raisonnement comme ci-dessus implique alors

$$\sharp [\mathcal{M}_v(a)/\mathcal{P}_v(J'_a)](k)_\kappa = \frac{\text{vol}(J'_a(\mathcal{O}_v), dt_v)}{\text{vol}(J_a^0(\mathcal{O}_v), dt_v)}.$$

Il reste à remarquer que dans les deux premiers cas, l'homomorphisme  $J_a \rightarrow J_{H,a_H}$  induit un isomorphisme sur les composantes neutres  $J_a^0 \rightarrow J_{H,a_H}^0$  et on obtient l'égalité

$$\sharp [\mathcal{M}_v(a)/\mathcal{P}_v(J'_a)](k)_\kappa = \sharp [\mathcal{M}_{H,v}(a)/\mathcal{P}_v(J'_a)](k)$$

qu'on voulait.

**8.5.9.** — Considérons maintenant le troisième cas où  $a_H(X_v)$  coupe transversalement  $\mathfrak{R}_{H,D}^G$  et n'intersecte pas  $\mathfrak{c}_{H,D}$ . On a dans ce cas  $d_{H,\bar{v}}(a_H)$  est nul de sorte que

$$\delta_{H,\bar{v}}(a_H) = 0 \text{ et } c_{H,\bar{v}}(a_H) = 0.$$

Comme  $\delta_{H,\bar{v}}(a_H) = 0$ , la fibre de Springer affine  $\mathcal{M}_{H,v}(a_H)$  est de dimension zéro. D'après 3.7.2,  $\mathcal{P}_v(J_{H,a_H})$  agit simplement transitivement sur  $\mathcal{M}_{H,v}(a_H)$  de sorte qu'on a encore

$$\sharp [\mathcal{M}_{H,v}(a_H)/\mathcal{P}_v(J_{H,a_H})](k) = 1.$$

Le même raisonnement comme ci-dessus montre que

$$\sharp [\mathcal{M}_{H,v}(a)/\mathcal{P}_v(J'_a)](k) = \frac{\text{vol}(J'_a(\mathcal{O}_v), dt_v)}{\text{vol}(J_{H,a_H}^0(\mathcal{O}_v), dt_v)}.$$

Notons que comme  $a_H(X_v)$  n'intersecte pas  $\mathfrak{c}_{H,D}$ ,  $J_{H,a_H}$  est un tore et en particulier  $J_{H,a_H} = J_{H,a_H}^0$ .

Comme l'invariant  $c_{\bar{v}}(a)$  ne dépend que de la fibre générique de  $J_a|_{X_v}$ , on a

$$c_{\bar{v}}(a) = c_{H,\bar{v}}(a_H) = 0.$$

Ceci implique que la fibre de Springer affine  $\mathcal{M}_{\bar{v}}(a)$  est de dimension

$$\delta_{\bar{v}}(a) = \frac{d_{\bar{v}}(a) - c_{\bar{v}}(a)}{2} = 1.$$

On est donc exactement dans la situation de 8.3. En appliquant la formule 8.3.8 tout en notant que l'hypothèse  $\kappa(\alpha^\vee) \neq 1$  est bien vérifiée ici, on obtient la formule

$$[\mathcal{M}_v(a)/\mathcal{P}_v(J_a)](k)_\kappa = \sharp A_{\pm\alpha}(k_v) q^{\deg(v)}$$

où  $A_{\pm\alpha}$  est le tore de dimension un sur  $k_v$  défini par

$$A_{\pm\alpha}(\bar{k}) = J_{H,a_H}(\mathcal{O}_{\bar{v}})/J_a(\mathcal{O}_{\bar{v}}).$$

En appliquant la formule 8.2.7, on trouve

$$\mathbf{O}_a^\kappa(1_{\mathfrak{g}_v}, dt_v) = \frac{q^{\deg(v)}}{\sharp A_{\pm\alpha}(k_v) \text{vol}(J_a^0(\mathcal{O}_v), dt_v)}.$$

On peut aussi vérifier la formule

$$\sharp A_{\pm\alpha}(k_v) \text{vol}(J_a^0(\mathcal{O}_v), dt_v) = \text{vol}(J_{H,a_H}^0(\mathcal{O}_v), dt_v)$$

qui implique

$$[\mathcal{M}_v(a)/\mathcal{P}_v(J'_a)](k)_\kappa = \frac{q^{\deg(v)} \text{vol}(J'_a(\mathcal{O}_v), dt_v)}{\text{vol}(J_{H,a_H}^0(\mathcal{O}_v), dt_v)}.$$

On obtient donc l'égalité

$$\sharp [\mathcal{M}_v(a)/\mathcal{P}_v(J'_a)](k)_\kappa = q^{\deg(v)} \sharp [\mathcal{M}_{H,v}(a)/\mathcal{P}_v(J'_a)](k)$$

qu'on voulait.

Ceci termine la démonstration de 8.5.7.  $\square$

**8.6. Le lemme fondamental de Langlands-Shelstad.** — On est maintenant en mesure de démontrer le lemme fondamental de Langlands et Shelstad 1.11.1.

*Démonstration.* — Soient  $X_v = \text{Spec}(\mathcal{O}_v)$  avec  $\mathcal{O}_v = k[[\epsilon_v]]$  et  $X_v^\bullet = \text{Spec}(F_v)$  avec  $F_v = k((\epsilon_v))$ . Soit  $G_v$  un groupe réductif sur  $X_v$  forme quasi-déployée de  $\mathbb{G}$  donnée par un  $\text{Out}(\mathbb{G})$ -torseur  $\rho_{G,v}$  sur  $X_v$ . Soit  $(\kappa, \rho_{\kappa,v})$  une donnée endoscopique elliptique cf. 1.8. Soit  $H_v$  le groupe endoscopique associé. Soit  $a_H \in \mathfrak{c}_H(\mathcal{O}_v)$  d'image  $a \in \mathfrak{c}(\mathcal{O}_v) \cap \mathfrak{c}^{\text{rs}}(F_v)$ .

**8.6.1.** — Si le centre de  $G_v$  contient un tore déployé  $C$ ,  $C$  est aussi contenu dans le centre de  $H_v$ . En remplaçant  $G_v$  par  $G_v/C$  et  $H_v$  par  $H_v/C$ , la  $\kappa$ -intégrale orbitale et l'intégrale orbitale stable envisagées ne changent pas de sorte qu'on peut supposer que le centre de  $G_v$  ne contient pas de tore déployé.

Si le centre de  $H_v$  contient un tore déployé  $C$ ,  $C$  est naturellement inclus dans le tore  $I_{\gamma_0}$  où  $\gamma_0 = \epsilon(a)$ . Le centralisateur  $M_v$  de  $C$  dans  $G_v$  est un sous-groupe de Levi de  $G_v$ . Par la formule de descente, on peut remplacer la  $\kappa$ -intégrales orbitales dans  $G_v$  par une  $\kappa$ -intégrale orbitale dans  $M_v$ . Le centre de  $M_v$  contient maintenant un tore déployé et on se ramène à la situation discutée ci-dessus. Après un nombre fini de ces réductions, on peut supposer que les centres de  $G_v$  et  $H_v$  ne contiennent pas de tores déployés.

**8.6.2.** — Soit  $\mathcal{M}_{H,v}(a_H)$  et  $\mathcal{M}_v(a)$  les fibres de Springer affines associées. D'après 3.5, il existe un entier naturel  $N$  tel que pour toute extension

finie  $k'$  de  $k$ , pour tout  $a'_H \in \mathfrak{c}_H(\mathcal{O}_v \otimes_k k')$  tel que

$$a_H \equiv a'_H \pmod{\epsilon_v^N}$$

alors

- $a'_H$  a une image  $a' \in \mathfrak{c}(\mathcal{O}_v \otimes_k k') \cap \mathfrak{c}^{\text{rs}}(F_v \otimes_k k')$  ;
- les fibres de Springer affines  $\mathcal{M}_{H,v}(a_H) \otimes_k k'$  et  $\mathcal{M}_{H,v}(a'_H)$  munies de l'action de  $\mathcal{P}_v(J_{H,a_H}) \otimes_k k'$  et  $\mathcal{P}_v(J_{H,a'_H})$  respectivement, sont isomorphes ;
- les fibres de Springer affines  $\mathcal{M}_v(a) \otimes_k k'$  et  $\mathcal{M}_v(a')$  munies de l'action de  $\mathcal{P}_v(J_a)$  et  $\mathcal{P}_v(J_{a'})$  respectivement, sont isomorphes.

Notons  $\delta_H(a_H)$  la dimension de la fibre de Springer affine  $\mathcal{M}_{H,v}(a_H)$ .

**8.6.3.** — Il existe une courbe projective lisse géométriquement connexe  $X$  sur  $k$  muni des données suivantes :

- deux  $k$ -points distincts notés  $v$  et  $\infty$ ,
- un isomorphisme entre la complétion de  $X$  en  $v$  avec le schéma  $X_v$  ci-dessus,
- un  $\pi_0(\kappa)$ -torseur  $\rho_\kappa$  sur  $X$  muni d'une trivialisation  $\alpha_\infty$  au-dessus de  $\infty$  et d'un isomorphisme  $\alpha_v$  avec  $\rho_{\kappa,v}$  au-dessus de  $X_v$ .

Soient  $G$  et  $H$  les  $X$ -schémas en groupes associés comme dans 1.8. Avec la donnée de  $\alpha_v$ , les restrictions de  $G$  et  $H$  à  $X_v$  sont canoniquement isomorphes à  $G_v$  et  $H_v$ . Les centres de  $G_v$  et  $H_v$  ne contenant par de tores déployés, il en est de même de  $G$  et  $H$ . Avec la donnée de  $\alpha_\infty$ , on a un homomorphisme

$$\rho_\kappa^\bullet : \pi_1(X, \infty) = \pi_1(\overline{X}, \infty) \rtimes \text{Gal}(\overline{k}/k) \rightarrow \pi_0(\kappa)$$

trivial sur le facteur  $\text{Gal}(\overline{k}/k)$ . Par conséquent, le sous-groupe  $\pi_1(\overline{X}, \infty)$  a la même image dans  $\pi_0(\kappa)$  que  $\pi_1(X, \infty)$ . Il s'ensuit que sur  $\overline{X}$ , les centres de  $G$  et  $H$  ne contiennent pas de tores déployés.

**8.6.4.** — On choisit maintenant un fibré inversible  $D$  sur  $X$  vérifiant les hypothèses suivantes

- il existe un fibré inversible  $D'$  sur  $X$  avec  $D = D'^{\otimes 2}$ ,
- une section globale de  $D'$  non nulle en  $v$ ,
- $\deg(D) > rN + 2g$  où  $r$  est le rang de  $G$  et  $g$  est le genre de  $X$ ,
- $\delta_H(a_H)$  est plus petit que l'entier  $\delta_H^{\text{bad}}(D)$  défini dans 7.6.4.

D'après 5.4.2, l'entier  $\delta_H^{\text{bad}}$  tend vers  $\infty$  lors que  $\deg(D) \rightarrow \infty$  de sorte que pour  $\deg(D)$  assez grand la dernière hypothèse est réalisée.

**8.6.5.** — Considérons les fibrations de Hitchin associées à la courbe  $X$ , au fibré inversible  $D$  et aux groupes  $G$  et  $H$  respectivement

$$f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{A} \text{ et } f_H : \mathcal{M}_H \rightarrow \mathcal{A}_H.$$

L'hypothèse que le centre  $G$  et  $H$  ne contient pas de tores déployés sur  $\bar{X}$  et l'hypothèse  $\deg(D) > 2g$  assurent que les ouverts anisotropes  $\mathcal{A}^{\text{ani}}$  et  $\mathcal{A}_H^{\text{ani}}$  ne sont pas vides.

**8.6.6.** — Avec l'hypothèse  $\deg(D) > rN + 2g$ , l'application de restriction des section globales à  $\text{Spec}(\mathcal{O}_v/\epsilon_v^N)$

$$H^0(X, \mathfrak{c}_{H,D}) \rightarrow \mathfrak{c}_H(\mathcal{O}_v/\epsilon_v^N)$$

est une application linéaire surjective. Soit  $Z$  le sous-espace affine de  $H^0(X, \mathfrak{c}_{H,D})$  des éléments ayant la même image dans  $\mathfrak{c}_H(\mathcal{O}_v/\epsilon_v^N)$  que  $a_H$ . C'est un sous-schéma fermé de codimension  $rN$  de  $\mathcal{A}_H$ . Par le même raisonnement que dans 4.6.1, on peut montrer que l'ouvert  $Z'$  de  $Z$  constitué des points  $a'_H \in Z'(\bar{k})$  tels que la courbe  $a'_H(\bar{X} - \{v\})$  coupe le diviseur  $\mathfrak{D}_{H,D} + \mathfrak{R}_{H,D}^G$  transversalement, est un ouvert non vide. Comme le complément de  $\mathcal{A}_H^{\text{ani}}$  dans  $\mathcal{A}_H$  est un fermé de codimension plus grande ou égale à  $\deg(D)$  cf. 6.5,  $Z' \cap \mathcal{A}_H^{\text{ani}} \neq \emptyset$ . En remplaçant  $Z'$  par  $Z' \cap \mathcal{A}_H^{\text{ani}}$ , on peut supposer que  $Z' \subset \mathcal{A}_H^{\text{ani}}$ . Pour tout  $a'_H \in Z'(\bar{k})$ , l'invariant  $\delta_H(a') = \delta_H(a_H)$  de sorte qu'on a  $Z' \subset \mathcal{A}_H^{\text{good}}$  où on dispose du théorème de stabilisation cf. 8.5.

Soit  $\tilde{Z}'$  l'image réciproque de  $Z'$  dans  $\tilde{\mathcal{A}}_H^{\text{good}}$ . Comme  $\tilde{Z}'$  est un schéma de dimension positive, il existe un entier  $m$  tel que pour toute extension  $k'/k$  de degré plus grand ou égal à  $m$ , l'ensemble  $\tilde{Z}'(k') \neq \emptyset$ . Soit  $\tilde{a}'_H \in \tilde{Z}'(k')$  au-dessus de  $a'_H \in Z(k')$ . Soient  $\tilde{a}'$  l'image de  $\tilde{a}'_H$  dans  $\tilde{\mathcal{A}}$  et  $a'$  l'image de  $a'_H$  dans  $\mathcal{A}$ .

**8.6.7.** — La conjonction de la partie du théorème de stabilisation 6.4.3 démontrée sur l'ouvert  $\tilde{\mathcal{A}}_H^{\text{good}}$  avec la formule 8.4.4 nous donne l'égalité

$$\begin{aligned} & \#(\mathcal{P}'_{a'})^0(k') \prod_{v' \in |(X-U) \otimes_k k'|} \#[\mathcal{M}_{H,v'}(a'_H)/\mathcal{P}_{v'}(J'_{a'})](k')_\kappa \\ &= q^{r(a'_H) \deg(k'/k)} \#(\mathcal{P}'_{a'})^0(k') \prod_{v' \in |(X-U) \otimes_k k'|} \#[\mathcal{M}_{v'}(a'_H)/\mathcal{P}_{v'}(J'_{a'})](k') \end{aligned}$$

avec un choix d'un schéma en groupes  $J'_{a'}$  lisse commutatif de fibre connexe muni d'un homomorphisme

$$J'_{a'} \rightarrow J_{a'} \rightarrow J_{H,a'_H}$$

comme dans 8.4.1. Il sera commode de choisir  $J'_{a'} = J_{a'}^0$  au-dessus de  $X_v$ .



**8.6.8.** — Puisque  $\tilde{a}'_H \in \tilde{\mathcal{U}}(k')$ , on peut appliquer 8.5.7 à toutes les places  $v' \neq v$ . En retranchant les égalités en ces places, on trouve une égalité en la place  $v$  du départ

$$\sharp[\mathcal{M}_{H,v}(a'_H)/\mathcal{P}_v(J_{a'}^0)](k')_\kappa = q^{r_v(a'_H) \deg(k'/k)} \sharp[\mathcal{M}_v(a'_H)/\mathcal{P}_v(J_{a'}^0)](k').$$

Comme on sait que la fibre de Springer affine  $\mathcal{M}_v(a) \otimes_k k'$  muni de l'action de  $\mathcal{P}_v(J_a) \otimes_k k'$  est isomorphe à  $\mathcal{M}_v(a')$  muni de l'action de  $\mathcal{P}_v(J_{a'})$  et la même chose pour le groupe  $H$ , on en déduit l'égalité

$$\sharp[\mathcal{M}_{H,v}(a_H)/\mathcal{P}_v(J_a^0)](k')_\kappa = q^{r_{H,v}^G(a_H) \deg(k'/k)} \sharp[\mathcal{M}_v(a_H)/\mathcal{P}_v(J_a^0)](k').$$

pour toute extension  $k'$  de  $k$  de degré plus grand que  $m$ . En appliquant 8.1.14, on obtient l'égalité

$$\sharp[\mathcal{M}_{H,v}(a_H)/\mathcal{P}_v(J_a^0)](k)_\kappa = q^{r_{H,v}^G(a_H)} \sharp[\mathcal{M}_v(a_H)/\mathcal{P}_v(J_a^0)](k).$$

En appliquant la formule 8.2.5, on obtient maintenant l'égalité

$$\mathbf{O}_a^\kappa(1_{\mathfrak{g}_v}, dt_v) = q^{r_{H,v}^G(a_H)} \mathbf{SO}_{a_H}(1_{\mathfrak{h}_v}, dt_v)$$

qu'on voulait.

Ceci termine la démonstration de la conjecture de Langlands-Sheldstad 1.11.1.  $\square$

**8.7. Stabilisation sur  $\tilde{\mathcal{A}}^{\text{ani}}$ .** — En renversant une nouvelle fois le processus local-global, on peut maintenant compléter la démonstration de 6.4.3.

*Démonstration.* — Gardons les notations de 8.5. Comme dans 8.5, il suffit de démontrer l'égalité de traces 8.5.4

$$(8.7.1) \quad \sum_n (-1)^n \text{tr}(\sigma_{k'}, (L_\kappa^n)_{\tilde{a}}) = \sum_n (-1)^n \text{tr}(\sigma_{k'}, (L_{H,\text{st}}^n)_{\tilde{a}_H}).$$

pour tout  $\tilde{a}_H \in \tilde{\mathcal{A}}_H^{\text{ani}}(k)$  d'image  $\tilde{a} \in \tilde{\mathcal{A}}^{\text{ani}}(k)$ . D'après 8.4.4, le membre de gauche de 8.5.4 vaut

$$(\mathcal{P}'_a)^0(k) \prod_{v \in |X-U|} \sharp[\mathcal{M}_v(a)/\mathcal{P}_v(J'_a)](k)_\kappa$$

alors que le membre de droite vaut

$$q^{r_H^G(D)} (\mathcal{P}'_a)^0(k) \prod_{v \in |X-U|} \sharp[\mathcal{M}_{H,v}(a)/\mathcal{P}_v(J'_a)](k).$$

En combinant 1.11.1, 8.2.5, on a l'égalité

$$[\mathcal{M}_v(a)/\mathcal{P}_v(J'_a)](k)_\kappa = q^{r_{H,v}^G(D)}[\mathcal{M}_{H,v}(a)/\mathcal{P}_v(J'_a)](k)$$

d'où 8.7.1. □

**8.8. Conjecture de Waldspurger.** — Soient maintenant  $G_1$  et  $G_2$  deux  $X$ -schémas en groupes appariés au sens de 1.12.5. Supposons que les centres de  $G_1$  et  $G_2$  ne contiennent pas de tores déployés au-dessus de  $\overline{X} = X \otimes_k \bar{k}$ .

**8.8.1.** — Soient  $f_1 : \mathcal{M}_1 \rightarrow \mathcal{A}_1$  et  $f_2 : \mathcal{M}_2 \rightarrow \mathcal{A}_2$  les fibrations de Hitchin associées. Comme dans 4.16, on a

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2.$$

Soient  $\mathcal{P}_1$  et  $\mathcal{P}_2$  les  $\mathcal{A}$ -champs de Picard associés à  $G_1$  et  $G_2$ . D'après 4.16.1, il existe un homomorphisme  $\mathcal{P}_1 \rightarrow \mathcal{P}_2$  qui induit une isogénie entre leurs composantes neutres.

**Théorème 8.8.2.** — *Il existe un isomorphisme entre les simplifications des faisceaux pervers gradués sur  $\mathcal{A}^{\text{ani}}$*

$$K_1 = \bigoplus_n {}^p\text{H}^n(f_{1,*}^{\text{ani}} \overline{\mathbb{Q}}_\ell)_{\text{st}} \text{ et } K_2 = \bigoplus_n {}^p\text{H}^n(f_{2,*}^{\text{ani}} \overline{\mathbb{Q}}_\ell)_{\text{st}}.$$

La démonstration de ce théorème suit essentiellement les mêmes étapes que celle de 6.4.3. En particulier, on démontrera en cours de route le lemme fondamental non standard conjecturé par Waldspurger 1.12.7.

**8.8.3.** — On démontre d'abord qu'il existe un tel isomorphisme au-dessus de l'ouvert  $\mathcal{A}^\diamond$ . Au-dessus de cet ouvert, les morphismes  $f_1$  et  $f_2$  sont propres et lisses de sorte que les restrictions de  $K_1$  et  $K_2$  à  $\mathcal{A}^\diamond$  sont des systèmes locaux gradués. Pour démontrer qu'il existe un isomorphisme entre leurs simplifications, il suffit d'après le théorème de Chebotarev de démontrer l'égalité de traces

$$(8.8.4) \quad \text{tr}(\sigma_{k'}, K_{1,a}) = \text{tr}(\sigma_{k'}, K_{2,a})$$

pour toute extension finie  $k'$  de  $k$  et pour tout point  $a \in \mathcal{A}^\diamond(k')$ . En remplaçant  $X$  par  $X \otimes_k k'$ , on peut supposer que  $k = k'$ .

**8.8.5.** — Soit  $a \in \mathcal{A}^\diamond(k)$ . D'après 4.6.6, on sait :

- $\mathcal{P}_{i,a}$  agit simplement transitivement sur  $\mathcal{M}_{i,a}$

–  $\mathcal{P}_{i,a}$  est de la forme  $[P_i/A_i]$  où  $P_i$  est une extension d'un groupe fini par une variété abélienne et où  $A_i$  est un groupe fini agissant trivialement sur  $P_i$ .

Par conséquent, le quotient  $[\mathcal{M}_{i,a}/P_i]$  est isomorphe au classifiant du groupe fini  $A_i$ . D'après la formule des points fixes 8.1.6 et 8.1.7, on a

$$\mathrm{tr}(\sigma, K_{i,a}) = \sharp P_i^0(k).$$

Puisque  $P_1^0$  et  $P_2^0$  sont des variétés abéliennes isogènes sur  $k$ , ils ont le même nombre de  $k$ -points d'où l'égalité des traces 8.8.4. Il existe donc un isomorphisme entre les simplifications des restrictions de  $K_1$  et  $K_2$  à  $\mathcal{A}^\diamond$ .

**8.8.6.** — D'après le théorème du support 7.6.6, il existe un isomorphisme entre les semi-simplifications des restrictions de  $K_1$  et  $K_2$  à

$$\mathcal{A}^{\mathrm{good}} = \mathcal{A}^{\mathrm{ani}} - \mathcal{A}^{\mathrm{bad}}.$$

**8.8.7.** — En procédant comme dans 8.6, on en déduit le lemme fondamental non standard conjecturé par Waldspurger 1.12.7.

**8.8.8.** — En renversant de nouveau le processus local-global comme dans 8.7, on en déduit l'égalité des traces 8.8.4 pour tout  $a \in \mathcal{A}^{\mathrm{ani}}(k')$  pour toute extension finie  $k'$  de  $k$ . On en déduit le théorème 8.8.2.

## Appendice A

### Dualité de Poincaré et comptage de dimension d'après Goresky et MacPherson

Goresky et MacPherson ont observé que la dualité de Poincaré impose une contrainte sur la codimension de support des faisceaux pervers simples présents dans le théorème de décomposition. Cette observation a joué un rôle crucial dans la démonstration du théorème du support. Il nous semble qu'elle devrait avoir d'autres applications également. Avec leur permission, nous rappelons cet argument de comptage de dimension et dualité de Poincaré un contexte général et sous la forme la plus simple possible. En toute généralité, cette contrainte est relativement faible mais en pratique, elle fournit une amorce précieuse à l'aide de laquelle on peut faire jouer d'autres arguments plus spécifiques.

Soient  $X$  et  $Y$  des schémas de type fini sur un corps fini  $k = \mathbb{F}_q$ . Soit  $f : X \rightarrow Y$  un morphisme propre. Supposons de plus que  $X$  est un  $k$ -schéma lisse. Alors, d'après Deligne [16] l'image directe  $f_* \overline{\mathbb{Q}}_\ell$  est un

complexe pur. D'après [6], il décompose géométriquement comme une somme directe de faisceaux pervers géométriquement irréductibles avec décalage. Il existe au-dessus de  $Y \otimes_k \bar{k}$  un isomorphisme

$$f_* \overline{\mathbb{Q}}_\ell = \bigoplus_{(K,n)} K[-n]^{m_{K,n}}$$

où la somme directe est étendue sur l'ensemble des classes d'équivalence des couples  $(K, n)$  constitué d'un faisceau pervers irréductible  $K$  sur  $Y \otimes_k \bar{k}$  et d'un entier  $n$  et où

$$m_{K,n} := \dim \operatorname{Hom}(K, {}^p H^n(f_* \overline{\mathbb{Q}}_\ell))$$

est un entier naturel nul sauf pour un nombre fini de couples  $(K, n)$ . Un faisceau pervers irréductible  $K$  est dit *présent* dans  $f_* \overline{\mathbb{Q}}_\ell$  s'il existe un entier  $n$  tel que  $m_{K,n} \neq 0$ .

La dualité de Poincaré implique une symétrie pour ces entiers  $m_{K,n}$ .

**Proposition 1.** — *Pour tout faisceau pervers géométriquement irréductible  $K$  sur  $Y$ , alors on a*

$$m_{K,n+\dim(X)} = m_{DK,-n+\dim(X)}$$

où  $DK$  est le dual de Verdier de  $K$ .

Goresky et MacPherson ont observé que cette symétrie impose une contrainte sur la codimension des supports des faisceaux pervers géométriquement irréductibles  $K$  présents dans  $f_* \overline{\mathbb{Q}}_\ell$ .

**Théorème 2.** — *Soient  $X$  et  $Y$  des schémas de type fini sur un corps  $k$ ,  $X$  est lisse sur  $k$ . Soit  $f : X \rightarrow Y$  un morphisme propre. Supposons que le morphisme  $f$  est de dimension relative  $d$ . Soit  $K$  un faisceau pervers irréductible sur  $Y \otimes_k \bar{k}$  présent dans  $f_* \overline{\mathbb{Q}}_\ell$ . Soit  $Z$  le support de  $K$ . Alors on a l'inégalité*

$$\operatorname{codim}(Z) \leq d.$$

*Démonstration.* — Supposons au contraire que  $\operatorname{codim}(Z) > d$ . D'après la dualité de Poincaré et quitte à échanger  $K$  et  $DK$  qui ont le même support, on peut supposer qu'il existe un entier  $n$

$$n \geq \dim(X)$$

tel que  $m_{K,n} \neq 0$ . D'après [6], il existe un ouvert  $Z'$  de  $Z$ , un système local  $K'$  sur  $S$  tel que  $K = j_{!*} K'[\dim(Z)]$  où  $j$  est l'inclusion de l'ouvert

$Z'$  dans  $Z$ . Soit  $y$  un point géométrique de  $Z'$ . La fibre de  $K$  en  $y$  est alors un  $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -espace vectoriel placé en degré

$$-\dim(Z) = -\dim(Y) + \operatorname{codim}(Z).$$

La fibre de  $K[-n]$  en  $y$  étant un facteur direct  $\operatorname{R}\Gamma(X_y, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ , ceci implique que

$$H^{n-\dim(Y)+\operatorname{codim}(Z)}(X_y) \neq 0.$$

Or, on a l'inégalité

$$n - \dim(Y) + \operatorname{codim}(Z) > 2d$$

parce que  $n \geq \dim(X)$  et  $\operatorname{codim}(Z) > d$ . Cette non annulation est en contradiction avec l'hypothèse que la fibre  $X_y$  est de dimension inférieure ou égale à  $d$ .  $\square$

**Théorème 3.** — *Mettons-nous sous les hypothèses du théorème précédent. Supposons en plus que les fibres de  $f$  sont géométriquement irréductibles de dimension  $d > 0$ . Soit  $K$  un faisceau pervers irréductible sur  $Y \otimes_k \bar{k}$  présent dans  $f_* \overline{\mathbb{Q}}_\ell$ . Soit  $Z$  le support de  $K$ . Alors on a l'inégalité stricte*

$$\operatorname{codim}(Z) < d.$$

*Démonstration.* — Sous l'hypothèse que les fibres de  $f$  sont irréductibles, le faisceau de cohomologie de degré maximal  $2d$  est le système local

$$H^{2d}(f_* \overline{\mathbb{Q}}_\ell) = \overline{\mathbb{Q}}_\ell(-d).$$

Considérons la décomposition de  $f_* \overline{\mathbb{Q}}_\ell$  sur  $Y \otimes_k \bar{k}$

$$f_* \overline{\mathbb{Q}}_\ell = \bigoplus_{(L,n)} L[-n]^{m_{L,n}}$$

où  $L$  parcourt l'ensemble des classes d'isomorphismes de faisceaux pervers irréductibles sur  $Y \otimes_k \bar{k}$  et  $n$  l'ensemble des entiers. Si  $m_{L,n} \neq 0$ , alors on a  $H^i(L[-n]) = 0$  pour tout  $i > 2d$  et même  $H^{2d}(L[-n]) = 0$  si  $L$  n'est pas isomorphe à  $\overline{\mathbb{Q}}_\ell[\dim(Y)]$ .

Le même argument que dans le théorème précédent montre que pour tout faisceau pervers irréductible  $K$  sur  $Y \otimes_k \bar{k}$  qui n'est pas isomorphe à  $\overline{\mathbb{Q}}_\ell[\dim(Y)]$  alors le support  $Z$  de  $K$  doit vérifier l'inégalité stricte  $\operatorname{codim}(Z) < d$ . Bien entendu, si  $K$  est isomorphe à  $\overline{\mathbb{Q}}_\ell[-\dim(Y)]$ , son support est  $Y$  tout entier et l'inégalité est trivialement satisfaite.  $\square$

## Références

- [1] Altman A., Iarrobino A., Kleiman S. : Irreducibility of the compactified Jacobian. in *Real and complex singularities* (Proc. Ninth Nordic Summer School/NAVF Sympos. Math., Oslo, 1976), 1–12.
- [2] Arthur J., An introduction to the trace formula. in *Harmonic analysis, the trace formula, and Shimura varieties*, 1–263, Clay Math. Proc., 4, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005.
- [3] Artin M. Algebraic approximation of structures over complete local rings. *Inst. Hautes études Sci. Publ. Math.* 36 (1969) 23–58.
- [4] Beauville A., Laszlo Y. : Un lemme de descente. *C. R. de l'Acad. des Sci. de Paris* 320 (1995) 335–340.
- [5] Beauville A., Narasimhan M., Ramanan S. : Spectral curves and generalized theta divisor. *J. Reine Angew. Math.* 398 (1989) 169–179.
- [6] Beilinson A., Bernstein J., Deligne P. : Faisceaux pervers. *Astérisque* 100 (1982).
- [7] Bezrukavnikov R. : The dimension of the fixed points set on affine flag manifolds. *Mathematical Research Letters* 3 (1996) 185–189.
- [8] Biswas I., Ramanan S. : Infinitesimal study of Hitchin pairs. *J. London Math. Soc.* 49 (1994) 219–231.
- [9] Bosch S., Lutkebohmert W., Raynaud M. : *Neron models*. Ergeb. der Math. 21. Springer Verlag 1990.
- [10] Bourbaki N. *Groupes et algèbres de Lie*, chapitres 4,5 et 6. Masson, Paris 1981.
- [11] Chevalley C. Invariants of finite groups generated by reflections. *Amer. J. Math* 67 (1955), 778–782.
- [12] Clozel L., The fundamental lemma for stable base change. *Duke Math. J.* 61 (1990), no. 1, 255–302.
- [13] Cluckers, R., Loeser, F. Fonctions constructibles exponentielles, transformation de Fourier motivique et principe de transfert . *Comptes Rendus de l'Acad. des Sciences de Paris* 341, 741–746 (2005)
- [14] Dat, J.-F., Lemme fondamental et endoscopie, une approche géométrique, *Séminaire Bourbaki* 940 novembre 2004.
- [15] S. Diaz, J. Harris, Ideals associated to Deformations of singular plane curves, *Trans. Amer. Math. Soc.* 309, 433–468. (1988).
- [16] Deligne P. : La conjecture de Weil II. *Publ. Math. de l'I.H.E.S.* 52 (1980) 137–252.
- [17] Deligne P. : Décomposition dans la catégorie dérivée, in *Motives*, Proc. of Symp. in Pure Math. vol. 55.1(1994) 115–128.
- [18] Deligne P. Communication privée, 2007.

- [19] Donagi R., Gaitsgory D. : The gerb of Higgs bundles. *Transform. Groups* 7 (2002) 109–153.
- [20] Faltings G. : Stable  $G$ -bundles and projective connections. *J. Alg. Geom.* 2 (1993) 507–568.
- [21] Faltings G. : Algebraic loop groups and moduli spaces of bundles. *J. Eur. Math. Soc.* 5 (2003), no. 1, 41–68.
- [22] Fulton W., Lazarsfeld R. : Connectivity and its application in algebraic geometry in *Algebraic geometry* LNM 862.
- [23] Fantechi B., Göttsche L., Van Straten D. : Euler number of the compactified Jacobian and multiplicity of rational curves. *J. Alg. Geom.* 8 (1999), 115–133.
- [24] Goresky M., Kottwitz R., MacPherson R. : Homology of affine Springer fiber in the unramified case. *Duke Math. J.* 121 (2004) 509–561.
- [25] Goresky M., Kottwitz R., MacPherson R. : Purity of equivalued affine Springer fibers. *Represent. Theory* 10 (2006), 130–146.
- [26] Goresky M., Kottwitz R., MacPherson R. : Codimension of root valuation strata. preprint 2006.
- [27] Grothendieck A., Dieudonné J. : éléments de géométrie algébrique IV. étude locale des schémas et de morphismes de schémas, *Pub. Math. de l'I.H.E.S.* 20, 24, 28 et 32.
- [28] Grothendieck A. : Cohomologie locale des faisceaux cohérents et théorèmes de Lefschetz locaux et globaux (SGA 2).
- [29] Grothendieck A. : Groupes de monodromie en Géométrie algébrique (SGA 7 I), LNM 288, Springer Verlag.
- [30] Hales, T. : The fundamental lemma for  $\mathrm{Sp}(4)$ . *Proc. Amer. Math. Soc.* 125 (1997) no. 1, 301–308.
- [31] Hales, T. : A statement of the fundamental lemma. in *Harmonic analysis, the trace formula, and Shimura varieties*, 643–658, Clay Math. Proc., 4, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005.
- [32] Hitchin N. : Stable bundles and integrable connections. *Duke Math. J.* 54 (1987) 91–114.
- [33] Kazhdan D. : On lifting. in *Lie group representations*, II (College Park, Md., 1982/1983), 209–249, Lecture Notes in Math., 1041, Springer, Berlin, 1984.
- [34] Kazhdan D., Lusztig G. : Fixed point varieties on affine flag manifolds. *Israel J. Math.* 62 (1988), no. 2, 129–168.
- [35] Kostant B. : Lie group representations on polynomial rings. *Amer. J. of Math.* 85 (1963) 327–404.
- [36] Kottwitz R. Orbital integrals on  $\mathrm{GL}_3$ . *Amer. J. Math.* 102 (1980), no. 2, 327–384.

- [37] Kottwitz R. : Unstable orbital integrals on  $SL(3)$ . *Duke Math. J.* 48 (1981), no. 3, 649–664
- [38] Kottwitz R. Stable trace formula : cuspidal tempered terms. *Duke Math. J.* 51 (1984) 611–650.
- [39] Kottwitz R. Isocrystal with additionnal structures. *Composotion Math.* 56 (1985) 201–220.
- [40] Kottwitz R. Base change for unit elements of Hecke algebras. *Compositio Math.* 60 (1986), no. 2, 237–250.
- [41] Kottwitz R. : Stable trace formula : elliptic singular terms. *Math. Ann.* 275 (1986) 365–399.
- [42] Kottwitz R. : Shimura varieties and  $\lambda$ -adic representations, in *Automorphic forms, Shimura varieties, and L-functions*, Vol. I 161–209, Perspect. Math., 10, Academic Press, Boston, MA, 1990.
- [43] Kottwitz R. : *Points on some Shimura varieties over finite fields*. J.A.M.S. 2 (1992).
- [44] Kottwitz R. Transfert factors for Lie algebra. *Represent. Theory* 3 (1999) 127–138.
- [45] Labesse, J.-P. Fonctions élémentaires et lemme fondamental pour le changement de base stable. *Duke Math. J.* 61 (1990), no. 2, 519–530.
- [46] Labesse, J.-P. et Langlands, R., L-indistinguishability for  $SL(2)$ . *Can. J. Math.* **31** (1979) 726–785.
- [47] Langlands R. *Base change for  $GL(2)$* . Annals of Mathematics Studies, 96. Princeton University Press 1980.
- [48] Langlands R. : *Les débuts d’une formule des traces stables*. Publications de l’Université Paris 7, 13 (1983).
- [49] Laumon G., Moret-Bailly L. : *Champs algébriques*. Ergebnisse der Mathematik 39. Springer-Verlag, Berlin, 2000.
- [50] Laumon G. : Fibres de Springer et Jacobiennes compactifiées in *Algebraic geometry and number theory*, 515–563, Progr. Math., 253, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2006..
- [51] Laumon, G. : Sur le lemme fondamental pour les groupes unitaires, prépublication [arxiv.org/abs/math/0212245](https://arxiv.org/abs/math/0212245).
- [52] Laumon, G. et Ngô B.C. : Le lemme fondamental pour les groupes unitaires, à paraître aux *Annals of Math.*
- [53] Matsumura, H. : Commutative ring theory. Second edition. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 8. Cambridge University Press, Cambridge, 1989.
- [54] Mumford, D. *Abelian varieties*. Oxford University Press.
- [55] Ngô B.C. : Fibration de Hitchin et endoscopie. *Inv. Math.* 164 (2006) 399–453.



- [56] Ngô B.C. : Fibration de Hitchin et structure endoscopique de la formule des traces. *International Congress of Mathematicians* Vol. II, 1213–1225, Eur. Math. Soc., Zürich, 2006.
- [57] Ngô B.C. : Fibrations de Hitchin pour les groupes classiques. En préparation.
- [58] Nitsure : Moduli space of semistable pairs on a curve. *Proc. London Math. Soc.* (3) 62 (1991), no. 2, 275–300.
- [59] Ono T., On Tamagawa numbers. In *Algebraic groups and discontinuous subgroups*. Proc. of Symp. in Pure Math. **9** (1966), A.M.S.
- [60] Rapoport M. : A guide to the reduction of Shimura varieties in *Automorphic forms*. I. Astérisque No. 298 (2005), 271–318.
- [61] Raynaud M. : Communication privée, 2004.
- [62] Rogawski, J., *Automorphic representations of unitary groups in three variables*. Annals of Math. Studies 123, 1–259, Princeton University Press, Princeton 1990.
- [63] Rosenlicht M. : Some basic theorems on algebraic groups. *Amer. J. Math.* 78 (1956), 401–443.
- [64] M. Schöder. Inauguraldissertation, Mannheim 1993.
- [65] J.-P. Serre. *Groupes algébriques et corps de classes* Publications de l’Institut de Mathématique de l’Université de Nancago, VII. Hermann, Paris 1959.
- [66] J.-P. Serre. *Corps locaux*. Publications de l’Institut de Mathématique de l’Université de Nancago, VIII. Hermann, Paris 1962.
- [67] D. Shelstad. Orbital integrals and a family of groups attached to a real reductive group, *Ann. Scient. de l’Ecole Normale Supérieure*, 12 (1979).
- [68] Sheppard G.C. et Todd J.A. : Finite unitary reflection groups. *Canad. J. of Math.* 6 (1954), 274–304.
- [69] Spaltenstein. On the fixed point set of a unipotent element on the variety of Borel subgroups. *Topology* 16 (1977), no. 2, 203–204.
- [70] Springer, T. Some arithmetical results on semi-simple Lie algebras. *Pub. Math. de l’I.H.E.S.*, 33 (1966), 115–141.
- [71] Springer T. : Reductive groups in *Automorphic forms, representations, and L-functions*. Proc. Symp. in Pure Math. 33-1 AMS 1997.
- [72] T. Springer, R. Steinberg. : Conjugacy classes in *Seminar on algebraic groups and related finite groups*. *Lectures Notes in Math.* 131 Springer Verlag 1970.
- [73] Steinberg R. : *Lectures on Chevalley groups*.
- [74] Teissier B., Résolution simultanée - I. Famille de courbes, in *Séminaire sur les Singularités des Surfaces*, M. Demazure, H. Pinkham, B. Teissier eds, Springer LNM 777 (1980).

- [75] Waldspurger, J.-L., Sur les intégrales orbitales tordues pour les groupes linéaires : un lemme fondamental. *Can. J. Math.* **43** (1991) 852–896.
- [76] Waldspurger, J.-L. , Le lemme fondamental implique le transfert. *Compositio Math.*, **105** (1997) 153–236.
- [77] Waldspurger J.-L. Intégrales orbitales nilpotentes et endoscopie pour les groupes classiques non ramifiés *Astérisque* 269.
- [78] Waldspurger J.-L. Endoscopie et changement de caractéristique, prépublication.
- [79] Waldspurger J.-L. : L’endoscopie tordue n’est pas si tordue : intégrales orbitales, prépublication 2006.
- [80] Whitehouse D. : The twisted weighted fundamental lemma for the transfer of automorphic forms from  $\mathrm{GSp}(4)$ . *Formes automorphes. II. Le cas du groupe  $\mathrm{GSp}(4)$ .* *Astérisque* No. 302 (2005), 291–436.
- [81] Weissauer R., A special case of fundamental lemma I-IV, preprint Mannheim 1993.

## Table des matières

Introduction.....	1
1. Conjectures de Langlands-Shelstad et Waldspurger.....	8
1.1. Morphisme de Chevalley.....	9
1.2. Section de Kostant.....	10
1.3. Torsion extérieure.....	11
1.4. Centralisateur régulier semi-simple.....	13
1.5. Classes de conjugaison dans une classe stable.....	14
1.6. Dualité de Tate-Nakayama.....	16
1.7. $\kappa$ -intégrales orbitales.....	17
1.8. Groupes endoscopiques.....	18
1.9. Transfert des classes de conjugaison stable.....	19
1.10. Discriminant et résultant.....	21
1.11. Le lemme fondamental pour les algèbres de Lie.....	22
1.12. Le lemme fondamental non standard.....	24
1.13. Formule globale de stabilisation.....	27
2. Centralisateur régulier et section de Kostant.....	31
2.1. Centralisateur régulier.....	31
2.2. Sur le quotient $[\mathfrak{g}/G]$ .....	33
2.3. Le centre de $G$ et les composantes connexes de $J$ .....	34
2.4. Description galoisienne de $J$ .....	35
2.5. Le cas des groupes endoscopiques.....	40
3. Fibres de Springer affines.....	41
3.1. Rappels sur la grassmannienne affine.....	42
3.2. Fibres de Springer affines.....	43
3.3. Symétries d'une fibre de Springer affine.....	45
3.4. Quotient projectif d'une fibre de Springer affine.....	46
3.5. Approximation.....	47
3.6. Cas linéaire.....	49
3.7. Dimension.....	50
3.8. Modèle de Néron.....	52
3.9. Composantes connexes.....	54
3.10. Densité de l'orbite régulière.....	58
3.11. Le cas d'un groupe endoscopique.....	58
4. Fibration de Hitchin.....	60
4.1. Rappels sur $\text{Bun}_G$ .....	62
4.2. Construction de la fibration.....	62
4.3. Symétries d'une fibre de Hitchin.....	63
4.4. Dimensions.....	64
4.5. L'ouvert $\mathcal{A}^\heartsuit$ et le revêtement caméral.....	67
4.6. L'ouvert $\mathcal{A}^\diamond$ .....	69

4.7. Cas linéaire.....	72
4.8. Modèle de Néron global.....	73
4.9. Invariant $\delta_a$ .....	76
4.10. Le groupe $\pi_0(\mathcal{P}_a)$ .....	77
4.11. Automorphismes.....	79
4.12. Calcul de déformation.....	82
4.13. Formule de produit.....	86
4.14. Densité.....	88
4.15. Le cas des groupes endoscopiques.....	89
4.16. Le cas des groupes appariés.....	90
5. Stratification par normalisation en famille.....	91
5.1. Normalisations en famille des courbes spectrales.....	92
5.2. Normalisation en famille des courbes camérales.....	94
5.3. Stratification à $\delta$ constant.....	98
5.4. Stratification par les valuations radicielles.....	100
5.5. L'ouvert étale $\tilde{\mathcal{A}}$ de $\mathcal{A}$ .....	102
5.6. Stratification par les invariants monodromiques.....	104
5.7. Description de $\pi_0(\mathcal{P})$ .....	107
6. Cohomologie au-dessus de l'ouvert anisotrope.....	111
6.1. L'ouvert anisotrope.....	111
6.2. La $\kappa$ -décomposition sur $\tilde{\mathcal{A}}^{\text{ani}}$ .....	113
6.3. L'immersion fermée de $\tilde{\mathcal{A}}_H$ dans $\tilde{\mathcal{A}}$ .....	115
6.4. Stabilisation géométrique : formulation sur $\tilde{\mathcal{A}}^{\text{ani}}$ .....	119
6.5. Le complément de $\mathcal{A}^{\text{ani}}$ dans $\mathcal{A}$ .....	121
7. Théorème du support.....	121
7.1. L'énoncé du théorème du support.....	122
7.2. Amplitude.....	130
7.3. Démonstration du théorème du support.....	131
7.4. Cap-produit.....	133
7.5. Démonstration de l'inégalité d'amplitude.....	149
7.6. Le cas de la fibration de Hitchin.....	149
8. Comptage de points.....	154
8.1. Remarques générales sur le comptage.....	155
8.2. Comptage dans une fibre de Springer affine.....	163
8.3. Un cas très simple.....	171
8.4. Comptage dans une fibre de Hitchin anisotrope.....	175
8.5. Stabilisation sur $\tilde{\mathcal{A}}_H^{\text{ani}} - \tilde{\mathcal{A}}_H^{\text{bad}}$ .....	177
8.6. Le lemme fondamental de Langlands-Shelstad.....	182
8.7. Stabilisation sur $\tilde{\mathcal{A}}^{\text{ani}}$ .....	185
8.8. Conjecture de Waldspurger.....	186

Appendice A. Dualité de Poincaré et comptage de dimension d'après Goresky et MacPherson.....	187
Références.....	190

---

NGÔ BAO CHÂU,  
 Institute for Advanced Study, Einstein Drive, Princeton NJ 08540, USA.  
 Département de Mathématiques, Université Paris-Sud, 91405 Orsay, France.  
*E-mail* : ngo@ias.edu et Bao-Chau.Ngo@math.u-psud.fr